TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

KỲ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2025
Môn thi: Toán
Dành cho các thí sinh thi thử vào chuyên Toán, chuyên Tin

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đáp án và hướng dẫn chấm gồm 07 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (5,0 điểm).	a) Giải phương trình $x^2-2x-1=(2x-3)\sqrt{x-1}$.	
	Điều kiện: $x\ge 1$. Phương trình $\Leftrightarrow x^2-2x-1=2x\sqrt{x-1}-3\sqrt{x-1}$ $\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{x-1}+(x-1)-3x+3\sqrt{x-1}=0$ $\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x-1}\right)^2-3\left(x-\sqrt{x-1}\right)=0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x-1}\right)\left(x-\sqrt{x-1}-3\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x-1}=0 \\ x-\sqrt{x-1}-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=x \\ \sqrt{x-1}=x-3 \end{array}\right.$	**0,5**
	* $\sqrt{x-1}=x \Leftrightarrow x-1=x^2 \Leftrightarrow x^2-x+1=0$ vô nghiệm.	**0,5**
	* $\sqrt{x-1}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0 \\ x-1=x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases}$	**0,5**
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$ Vậy nghiệm của phương trình là $x=5$.	**0,5**
	Lời giải khác	
	Điều kiện: $x\ge 1$. Đặt $\sqrt{x-1}=a,\ a\ge 0$. Ta có $x=a^2+1$.	**0,5**
	Thay vào phương trình đã cho ta được $a^4+2a^2+1-2(a^2+1)-1=(2a^2-1)a$	**0,5**
	$\Leftrightarrow a^4-2a^3+a-2=0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow (a-2)(a^3+1)=0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow a=2$ (vì $a\ge 0$). Suy ra $x=5$.	**0,5**
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x-y}=y+1 & (1) \\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=x & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện: $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$ Từ điều kiện suy ra $x\ge 0$.	**0,5**

	Phương trình (1) $\Leftrightarrow x\sqrt{x-y}-x+x-y-1=0$ $\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x-y}-1\right)+x-y-1=0$ $\Leftrightarrow x.\dfrac{x-y-1}{\sqrt{x-y}+1}+x-y-1=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left(x-y-1\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x-y}+1}+1\right)=0$ $\Leftrightarrow x=y+1.$	0,5
	Thế vào (2) ta được $1+\sqrt{2y+1}=y+1 \Leftrightarrow \sqrt{2y+1}=y \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ 2y+1=y^2 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ y=1\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow y=1+\sqrt{2}.$ Suy ra nghiệm $(x;\, y)$ của hệ là $\left(2+\sqrt{2};\, 1+\sqrt{2}\right)$.	0,5
	Lời giải khác	
	Điều kiện: $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$ Đặt $\sqrt{x+y}=a,\ \sqrt{x-y}=b,\ a\ge 0,\ b\ge 0,$ ta có $x=\dfrac{a^2+b^2}{2},\ y=\dfrac{a^2-b^2}{2}.$	0,5
	Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} \dfrac{a^2+b^2}{2}.b=\dfrac{a^2-b^2}{2}+1 \\ a+b=\dfrac{a^2+b^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(b-1)+b^3+b^2-2=0 \\ a^2+b^2=2(a+b) \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(a^2+b^2+2b+2)=0 \\ a^2+b^2=2(a+b) \end{cases} \Rightarrow b=1.$	0,5
	Khi đó $\sqrt{x-y}=1$ hay $x=y+1.$ Thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được $\sqrt{2y+1}=y$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ y^2-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=1+\sqrt{2}.$ Suy ra $x=2+\sqrt{2}.$ Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;\, y)=\left(2+\sqrt{2};\, 1+\sqrt{2}\right)$.	0,5
Câu 2 (3,0 điểm).	a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\, y)$ thỏa mãn $x^2+1=x+y+xy$.	
	Ta có $x^2+1=x+y+xy \Leftrightarrow x^2-x+1-y(x+1)=0$ $\Leftrightarrow x^2+x-2x-2+3-y(x+1)=0$ $\Leftrightarrow x(x+1)-2(x+1)+3-y(x+1)=0$ $\Leftrightarrow (x+1)(x-y-2)=-3.$	0,5
	Vì $-3=(-1).3=3.(-1)=(-3).1=1.(-3)$ nên có 4 trường hợp xảy ra.	0,5

Lập bảng

$x+1$	-1	3	-3	1
$x-y-2$	3	-1	1	-3
x	-2	2	-4	0
y	-7	1	-7	1

Vậy các cặp số nguyên $(x;\, y)$ thỏa mãn là $(-2;\,-7)$, $(2;\,1)$, $(-4;\,-7)$, $(0;\,1)$. **0,5**

Lời giải khác

Phương trình đã cho tương đương với $x^2-(y+1)x+1-y=0$. (1)

Ta có $\Delta=(y+1)^2-4(1-y)=(y+3)^2-12$.

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương. **0,5**

Đặt $\Delta=k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Khi đó ta có $(y+3)^2-k^2=12$

hay $(y+3-k)(y+3+k)=12$. (2)

Do $y\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$ nên $y+3-k$ và $y+3+k$ cùng tính chẵn lẻ, đồng thời $y+3-k\le y+3+k$. Do đó (2) tương đương với hai trường hợp sau: **0,5**

TH 1. $\begin{cases} y+3-k=2 \\ y+3+k=6. \end{cases}$ Trường hợp này ta được $y=1$ và suy ra $x=0$, $x=2$.

TH 2. $\begin{cases} y+3-k=-6 \\ y+3+k=-2. \end{cases}$ Trường hợp này ta được $y=-7$ và $x=-4$, $x=-2$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;\, y)$ thỏa mãn là $(0;\,1)$, $(2;\,1)$, $(-2;\,-7)$, $(-4;\,-7)$. **0,5**

b) Giả sử đa thức $P(x)$ có các hệ số là số nguyên thỏa mãn $P(1)=10$, $P(3)=4$. Chứng minh rằng $P(2025)+P(2026)$ không là số chính phương.

Xét đa thức $f(x)=P(x)+3x-13$.

Từ $P(1)=10$, $P(3)=4$ suy ra $f(1)=f(3)=0$. **0,5**

Do đó $f(x)=(x-1)(x-3)Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức hệ số nguyên.

Suy ra $P(x)=(x-1)(x-3)Q(x)-3x+13$. **0,5**

Do đó $P(2025)=2024.2022.Q(2025)-3.2025+13$ chia 3 dư 1;

$P(2026)=2025.2023.Q(2026)-3.2026+13$ chia 3 dư 1.

Suy ra $P(2025)+P(2026)$ chia 3 dư 2 nên không là số chính phương. **0,5**

Lời giải khác

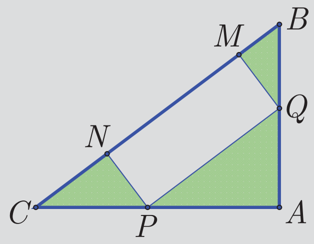
Sử dụng tính chất: Cho đa thức $P(x)$ có các hệ số nguyên và các số nguyên a, b, khi đó $\big(P(a)-P(b)\big) \vdots (a-b)$.

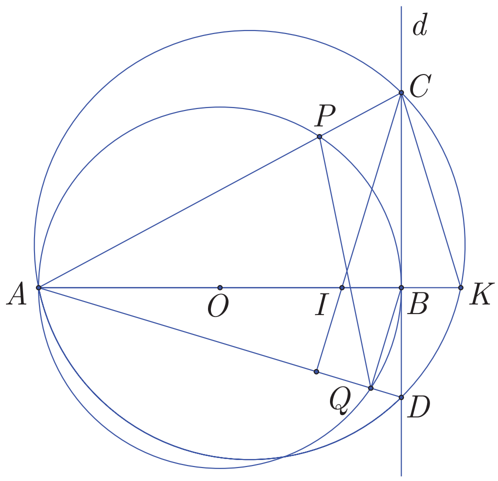
Ta có $P(2025)-4=P(2025)-P(3) \vdots \big(2025-3\big) \vdots 3$; **0,5**

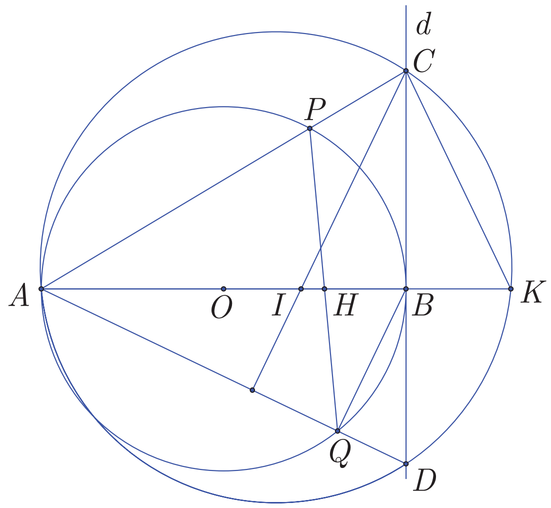
$P(2026)-10=P(2026)-P(1) \vdots \big(2026-1\big) \vdots 3$. **0,5**

Suy ra $P(2025)+P(2026)\equiv 14 \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3$.

Do đó $P(2025)+P(2026)$ không là số chính phương. **0,5**

Câu 3 (2,0 điểm).	Trường X đang khảo sát để làm một sân chơi thể thao cho các em học sinh ở khu đất nằm ở góc trường có dạng tam giác ABC vuông tại A với $AB = 60\,\text{m}$, $AC = 80\,\text{m}$. Sân chơi có dạng hình chữ nhật $MNPQ$ (như hình vẽ), phần đất còn lại dự kiến sẽ được trồng cây xanh lấy bóng mát. Hỏi nhà trường có thể làm sân chơi có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông? 	
	Áp dụng định lí Pitago ta có $BC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 100\,\text{m}$. Đặt $MQ = x$ m. Ta có $\Delta MBQ \sim \Delta ABC$ nên $\dfrac{MQ}{AC} = \dfrac{MB}{AB} \Rightarrow MB = \dfrac{AB.MQ}{AC} = \dfrac{3x}{4}$;	**0,5**
	$\Delta NPC \sim \Delta ABC$ nên $\dfrac{NC}{AC} = \dfrac{NP}{AB} \Rightarrow NC = \dfrac{AC.NP}{AB} = \dfrac{4x}{3}$. Suy ra $MN = BC - BM - NC = 100 - \dfrac{3x}{4} - \dfrac{4x}{3} = 100 - \dfrac{25x}{12}$.	**0,5**
	Do đó diện tích hình chữ nhật là $S_{MNPQ} = x.\left(100 - \dfrac{25x}{12}\right)$	**0,5**
	$= \dfrac{12}{25}.\dfrac{25x}{12}.\left(100 - \dfrac{25x}{12}\right) \le \dfrac{12}{25}.\left(\dfrac{100}{2}\right)^2 = 1200.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{25x}{12} = 100 - \dfrac{25x}{12} \Leftrightarrow x = 24$. Vậy diện tích lớn nhất có thể của sân chơi là $1200\,\text{m}^2$.	**0,5**
	Lời giải khác	
	Ta có $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3}$. Đặt $AP = 4t,\ AQ = 3t \Rightarrow PQ = 5t$.	**0,5**
	Ta có $MQ = BQ.\sin B = (60 - 3t).\dfrac{8}{10} = \dfrac{12}{5}(20 - t)$.	**0,5**
	Suy ra $S_{MNPQ} = 5t.\dfrac{12}{5}(20 - t) = 12.(20t - t^2)$	**0,5**
	$= 12\left[100 - (t - 10)^2\right] \le 1200.$	**0,5**
Câu 4 (2,0 điểm).	Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c$.	
	Từ giả thiết a, b, c không âm và $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ suy ra $0 \le a, b, c \le 2$.	**0,5**
	* Tìm giá trị nhỏ nhất Ta có $P^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ $\ge a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \ge a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4.$ Suy ra $P \ge 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = 0,\ c = 2$. Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 2.	**0,5**

	* Tìm giá trị lớn nhất Ta có $(2-a)(2-b)(2-c) = 8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) - abc$ $= 8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + a^2 + b^2 + c^2 - 4$ $= (a+b+c)^2 - 4(a+b+c) + 4$ $= P^2 - 4P + 4.$ Mặt khác, áp dụng BĐT Côsi, ta có $$(2-a)(2-b)(2-c) \le \left(\frac{6-a-b-c}{3}\right)^3 = \frac{(6-P)^3}{27}.$$	0,5
	Suy ra $P^2 - 4P + 4 \le \frac{(6-P)^3}{27}$ $\Leftrightarrow P^3 + 9P^2 - 108 \le 0$ $\Leftrightarrow (P-3)(P+6)^2 \le 0.$ Do đó $P \le 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Suy ra giá trị lớn nhất của P là 3.	0,5
Câu 5 (6,0 điểm).	Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và điểm I cố định thuộc đoạn OB. Kẻ tiếp tuyến d của (O) tại B và lấy điểm C trên d $(C \ne B)$. Đường thẳng qua A, vuông góc với IC, cắt d tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt AB tại K $(K \ne A)$. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của AC, AD với (O). a) Chứng minh tứ giác $CDQP$ nội tiếp.	
	 Vì $\widehat{APQ} = \widehat{ABQ}$ và $\widehat{ABQ} = \widehat{BDQ}$ (cùng phụ với $\widehat{QBD}$) nên $\widehat{APQ} = \widehat{BDQ}$. Do đó tứ giác $CDQP$ nội tiếp.	2,0
	b) Cho $BI = \frac{R}{3}$. Tính BK theo R.	
	Ta có $\Delta BCK \sim \Delta BAD$ (g.g). Suy ra $\frac{BC}{BA} = \frac{BK}{BD} \Rightarrow BA.BK = BC.BD.$ (1)	1,0
	Vì $\Delta BCI \sim \Delta BAD$ (g.g) nên $\frac{BC}{BA} = \frac{BI}{BD}$ $\Rightarrow BC.BD = BI.BA = \frac{R}{3}.2R = \frac{2R^2}{3}.$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $BK = \frac{R}{3}$.	1,0

	Lời giải khác	
	Ta có $\widehat{KCD} = \widehat{KAD} = 90^0 - \widehat{D} = \widehat{DCI}$.	**1,0**
	Do đó tam giác CIK cân tại C. Lại có $CB \perp IK$ nên $BK = BI = \frac{R}{3}$.	**1,0**
	c) Chứng minh rằng khi C thay đổi trên d, đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.	
	 Gọi H là giao điểm của PQ với AB. Từ kết quả chứng minh ý b) ta có $BK = BI$. Mà I cố định nên K cố định. Ta có $\widehat{APQ} = \widehat{ADC} = \widehat{AKC}$ nên tứ giác $HPCK$ nội tiếp. Suy ra $AH.AK = AP.AC$.	**1,0**
	Mặt khác, ΔABC vuông tại B có đường cao BP nên $AP.AC = AB^2 = 4R^2$. Suy ra $AH.AK = 4R^2 \Rightarrow AH = \frac{4R^2}{AK}$ không đổi. Suy ra H cố định.	**1,0**
Câu 6 (2,0 điểm).	Xét tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$. a) Bạn An chọn ngẫu nhiên một số a thuộc S và nhỏ hơn 6, bạn Bình chọn ngẫu nhiên một số b thuộc S là lớn hơn 5. Sau đó các bạn ghép hai số đã chọn thành số $\overline{ab}$. Tính xác suất để $\overline{ab}$ chia hết cho 3.	
	Số cách An chọn một số a thuộc S nhỏ hơn 6 là 5; Số cách Bình chọn một số b thuộc S lớn hơn 5 là 6. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là số kết quả lập số $\overline{ab}$ là $n(\Omega) = 30$.	**0,5**
	Gọi E là biến cố "$\overline{ab}$ chia hết cho 3". Ta có $\overline{ab}$ chia hết cho $3 \Leftrightarrow a + b \vdots 3$. Suy ra $E = \{18; 111; 27; 210; 36; 39; 48; 411; 57; 510\}$. Do đó $n(E) = 10$. Suy ra xác suất $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.	**0,5**

	b) Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mọi cách lấy k số thuộc S luôn tồn tại hai số $x,\, y$ với $x > y$ trong k số đã lấy sao cho $x + y$ chia hết cho $x - y$.	
	Xét tập $X = \{1; 4; 7; 10\}$ gồm 4 số thuộc S đều dư 1 khi chia 3. Ta có tổng 2 số thuộc X chia 3 dư 2 mà hiệu hai số thuộc X chia hết cho 3 nên với cách lấy 4 số $1,\, 4,\, 7,\, 10$ thì không tồn tại hai số $x,\, y$ với $x > y$ trong 4 số đã lấy sao cho $x + y$ chia hết cho $x - y$. Suy ra $k \le 4$ không thỏa mãn, nên $k \ge 5$.	**0,5**
	Ta chứng minh $k = 5$ thỏa mãn. Xét cách lấy 5 số bất kỳ $a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5$ thuộc S, giả sử $$1 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le 11.$$ Ta có $a_5 - a_4 + a_4 - a_3 + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 = a_5 - a_1 \le 11 - 1 = 10$ nên trong các hiệu $a_5 - a_4,\, a_4 - a_3,\, a_3 - a_2,\, a_2 - a_1$ phải có ít nhất một số không lớn hơn 2, giả sử $a_2 - a_1 \le 2$. * Nếu $a_2 - a_1 = 1$, thì $a_2 + a_1 \vdots a_2 - a_1$. * Nếu $a_2 - a_1 = 2$, thì $a_2,\, a_1$ cùng tính chẵn lẻ nên $a_2 + a_1 \vdots a_2 - a_1$. Do đó $k = 5$ thỏa mãn. Vậy số nguyên k nhỏ nhất là $k = 5$.	**0,5**

<u>Ghi chú:</u> Thí sinh làm cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa!

-------------- HẾT --------------