BẤT ĐẲNG THỨC, CỰC TRỊ HÌNH HỌC

PHƯƠNG PHÁP

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1:

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: Sử dụng các đẳng thức đã biết và kết hợp với các bất đẳng thức quen thuộc như Cô-si, Bunhia,...

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: Sử dụng các đẳng thức đã biết và kết hợp với các bất đẳng thức quen thuộc như Cô-si, Bunhia,...

Cách 2: Thực hiện 3 bước

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: Sử dụng các đẳng thức đã biết và kết hợp với các bất đẳng thức quen thuộc như Cô-si, Bunhia,...

Cách 2: Thực hiện 3 bước

- Biểu diễn biểu thức theo 1 ẩn x

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: Sử dụng các đẳng thức đã biết và kết hợp với các bất đẳng thức quen thuộc như Cô-si, Bunhia,...

Cách 2: Thực hiện 3 bước

- **Biểu diễn biểu thức theo 1 ẩn x**
- **Tìm điều kiện của x**

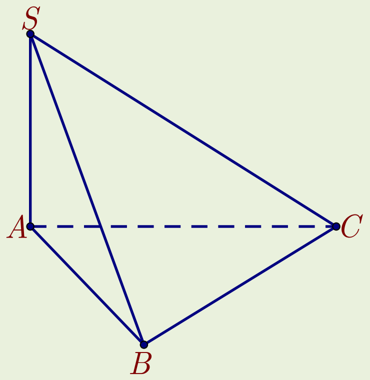
PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: Sử dụng các đẳng thức đã biết và kết hợp với các bất đẳng thức quen thuộc như Cô-si, Bunhia,...

Cách 2: Thực hiện 3 bước

- **Biểu diễn biểu thức theo 1 ẩn x**
- **Tìm điều kiện của x**
- **Khảo sát hàm số**

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), đáy là tam giác vuông cân tại B, $SB = a$. Tính sin của góc tạo bởi (SBC) và (ABC) khi thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.

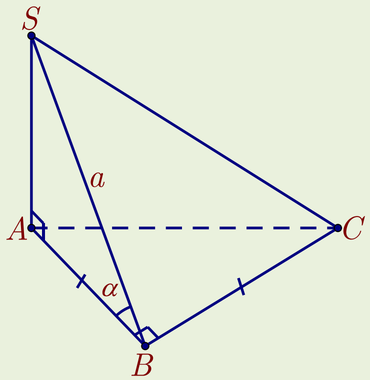


Giải: Ta có $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SBA} = \alpha$

$\Rightarrow BC = AB = a\cos\alpha$ và $SA = a\sin\alpha$.

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}.a\cos\alpha\,.\,a\cos\alpha\right).a\sin\alpha.$$

$$= \frac{1}{6}a^3.\cos^2\alpha\,.\sin\alpha.$$



Xét hàm số $f(x) = (1 - x^2)x$ với $x \in (0;1)$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}/3$.

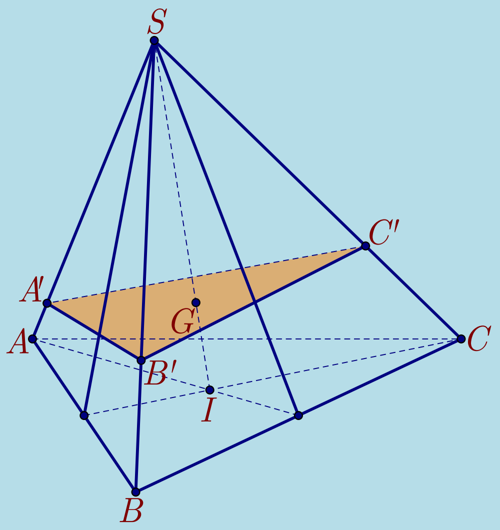
Lập BBT ta có $\max f(x) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Vậy, khi $V_{S.ABCD}$ lớn nhất thì $\sin\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Mặt phẳng (α) đi qua trọng tâm G của hình chóp và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Xác định vị trí của (P) để biểu thức

$$Q = \frac{1}{SA'.SB'} + \frac{1}{SB'.SC'} + \frac{1}{SC'.SA'}$$

đạt giá trị lớn nhất.



Giải. Đặt $\frac{SA}{SA'} = a,\ \frac{SB}{SB'} = b,\ \frac{SC}{SC'} = c.$

Áp dụng bổ đề ta có

$$a + b + c = 3.\frac{SI}{SG} = 3.\frac{4}{3} = 4.$$

Lưu ý $SA = SB = SC = 1$. Ta có

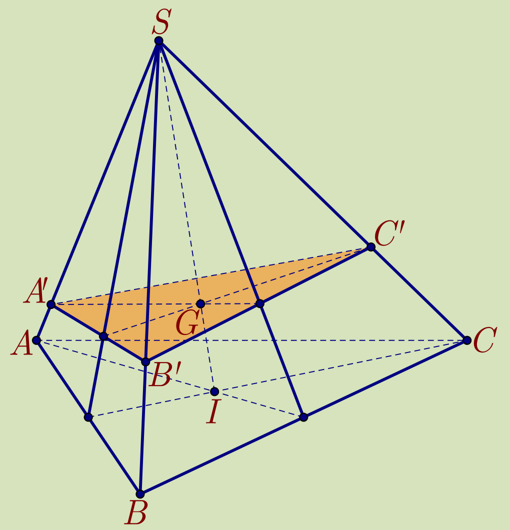
$$Q = \frac{1}{SA'.SB'} + \frac{1}{SB'.SC'} + \frac{1}{SC'.SA'}$$

$$= \frac{SA.SB}{SA'.SB'} + \frac{SB.SC}{SB'.SC'} + \frac{SC.SA}{SC'.SA'}$$

$$= ab + bc + ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{16}{3}.$$

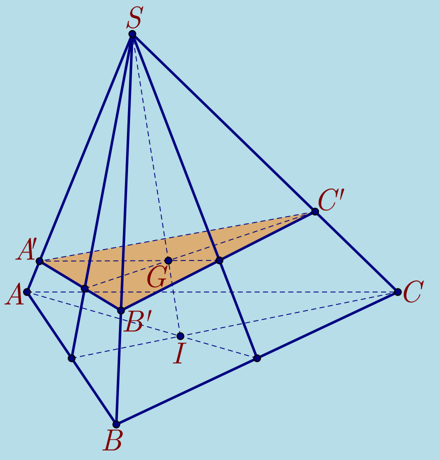
Dấu " = " xảy ra khi $a = b = c = 4/3$.

Khi đó $(\alpha)\ //(ABC)$.



Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Mặt phẳng (α) đi qua trọng tâm G của hình chóp và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}.$$



Giải. $\dfrac{1}{SA'} = x,\ \dfrac{1}{SB'} = y,\ \dfrac{1}{SC'} = z.$ Áp dụng bổ đề ta có

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3.\frac{SI}{SG}$$

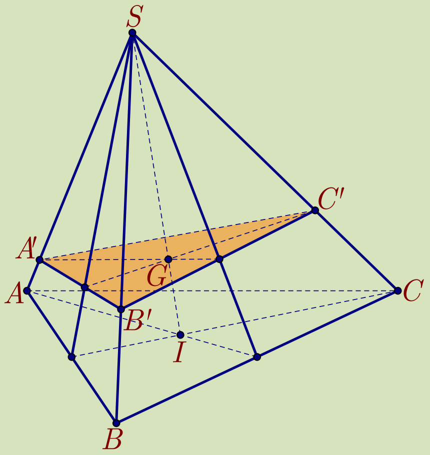
$$\Rightarrow ax + by + cz = 3.\frac{4}{3} = 4.$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\geq \frac{(ax + by + cx)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

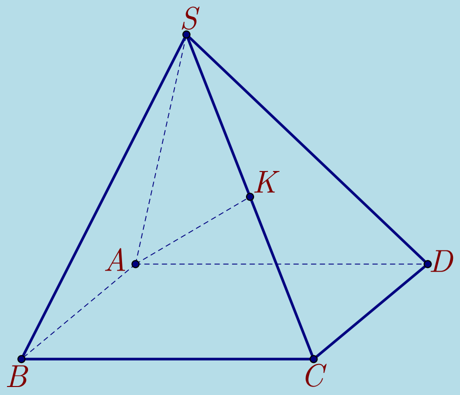
Dấu " = " xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \\ ax + by + cz = 4. \end{cases}$$



Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và K là trung điểm của SC. Một mặt phẳng (P) chứa AK và lần lượt cắt cạnh SB, SD tại M, N (khác S). Tìm GTNN và GTLN của biểu thức

$$T = \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD}.$$



Giải Câu 4. Gọi $O = AC \cap BD, I = SO \cap AK$.

Khi đó M, I, N thẳng hàng.

Đặt $\dfrac{SB}{SM} = x, \dfrac{SD}{SN} = y \Rightarrow T = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. Áp dụng

Bổ đề ta có $\dfrac{SB}{SM} + \dfrac{SD}{SN} = 2.\dfrac{SO}{SI} = 2.\dfrac{3}{2} = 3.$

Do đó $x + y = 3$. Suy ra

$T = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \min(T) = \dfrac{4}{3}$.

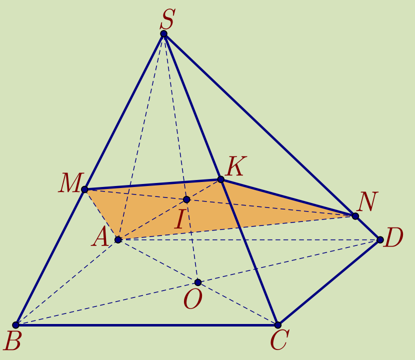
Vì $N \in [SA]$ nên $M \in [EB] \Rightarrow x \in [1; 2]$

$\Rightarrow (1-x)(2-x) \geq 0 \Rightarrow x(3-x) \geq 2$

$\Rightarrow xy \geq 2$

$\Rightarrow T = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{xy} \leq \dfrac{3}{2} \Rightarrow \max(T) = \dfrac{3}{2}$.

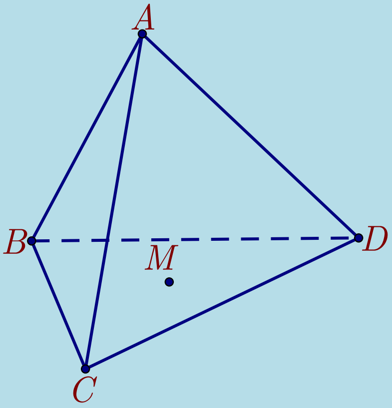
Dấu " = " xảy ra khi $x = 1, y = 2$ hoặc $x = 2, y = 1$.



Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ và M là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Kẻ qua M các đường thẳng song song với AB, AC, AD lần lượt cắt (ACD), (ABD), (ABC) tại B', C', D'.

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}}.$$



Giải Câu 5. $BM \cap CD = I, MB' // AB\ (B' \in AI)$.

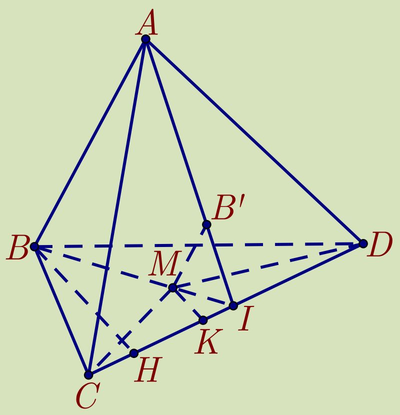
$\frac{MB'}{AB} = \frac{IM}{IB} = \frac{MK}{BH} = \frac{S_{MCD}}{S_{BCD}}$. Tương tự ta có

$\frac{MC'}{AC} = \frac{S_{MBD}}{S_{BCD}}$ và $\frac{MD'}{AD} = \frac{S_{MBC}}{S_{BCD}}$. Suy ra

$$\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = 1.$$

$$1 = \frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MB'}{AB}.\frac{MC'}{AC}.\frac{MD'}{AD}}$$

$\Rightarrow \frac{AB.AC.AD}{MB'.MC'.MD'} \geq 27$. Suy ra

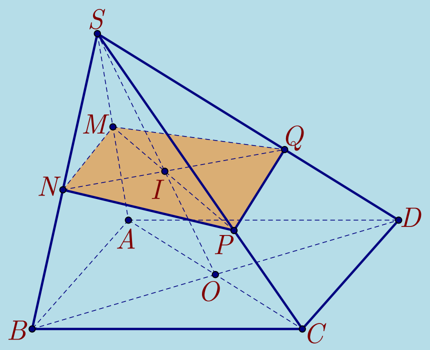


$$T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}} \geq 3\sqrt[6]{\frac{AB.AC.AD}{MB'.MC'.MD'}} \geq 3\sqrt[6]{27} = 3\sqrt{3}.$$

Dấu " = " xảy ra khi M là trọng tâm ΔBCD.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua S cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn $SA = 2SM, SC = 3PC$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + 4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2.$$



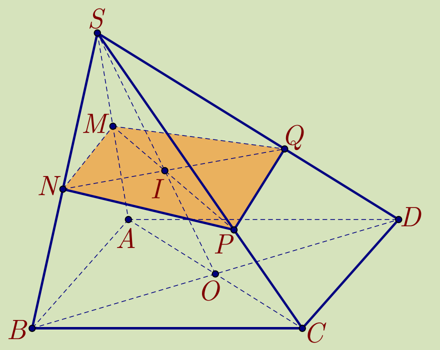
Giải Câu 6. HS tự nêu cách xác định N, Q.

Đặt $\frac{SB}{SN} = x, \frac{SD}{SQ} = y$. Suy ra

$$x + y = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} = 2.\frac{SO}{SI} = \frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = 2 + \frac{3}{2}$$

Vì $x, y \geq 1$ và $x + y = 7/2$ nên $1 \leq x, y \leq 5/2$.

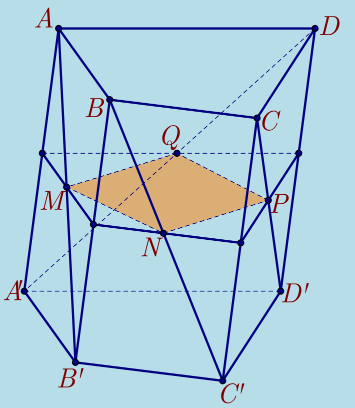
$$\Rightarrow T = x^2 + 4y^2 = x^2 + 4\left(\frac{7}{2} - x\right)^2$$



$$= 5x^2 - 28x + 49 \text{ với } x \in \left[1; \frac{5}{2}\right].$$

Sử dụng đạo hàm ta tìm được $\min(T) = T\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{41}{4}$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn song song hai mặt đáy cắt các đoạn thẳng AB', BC', CD', DA' lần lượt tại M, N, P, Q. Xác định vị trí của (α) để diện tích tứ giác $MNPQ$ nhỏ nhất.



Giải Câu 7. Đặt $S = S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'}, \dfrac{AI}{AA'} = x$. Ta có

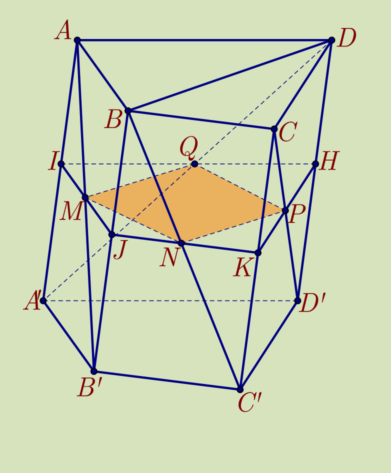
$$\frac{S_{IMQ}}{S_{ABD}} = \frac{IM}{AB}.\frac{IQ}{AD} = \frac{IM}{A'B'}.\frac{IQ}{AD} = x.(1-x).$$

Tương tự $\dfrac{S_{JMN}}{S_{BAC}} = \dfrac{S_{KNP}}{S_{CBD}} = \dfrac{S_{HPQ}}{S_{DCA}} = x(1-x)$. Do đó

$$S_{MNPQ} = S_{IJKH} - S_{IMQ} - S_{JMN} - S_{KNP} - S_{HPQ}$$
$$= S - x(1-x).2S.$$

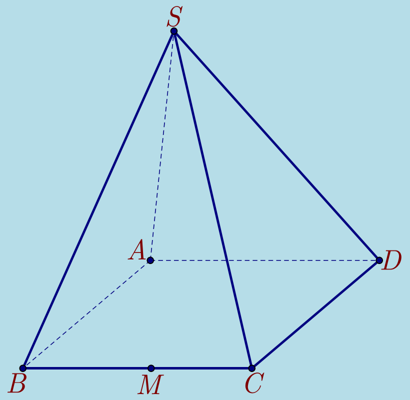
Suy ra S_{MNPQ} nhỏ nhất $\Leftrightarrow x(1-x)$ lớn nhất. Ta có

$$x(1-x) \le \frac{\left(x+(1-x)\right)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

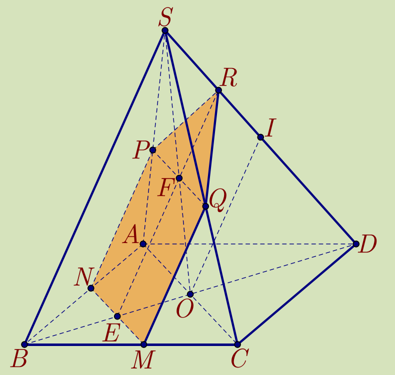


Dấu " = " xảy ra khi $x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha)$ đi qua trung điểm các cạnh bên.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M di động trên cạnh BC (M khác B và C). Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với SB, AC. Tìm vị trí của điểm M để thiết diện của (α) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích lớn nhất.



Giải Câu 8. Kẻ $MN\ //AC$ $(N \in AB)$, kẻ $MQ\ //SB$ $(Q \in SC)$, kẻ $NP\ //SB$ $(P \in SA)$. BD cắt AC, MN tại O, E. Kẻ $ER\ //SB$ $(R \in SD)$. Thdiện là $MNPRQ$.



Ta có $MNPQ$ là hình bình hành, SO và RE đều đi qua trung điểm F của PQ. Kẻ $OI//SB$ $(I \in SD)$.

Đặt $(\widehat{SB, AC}) = \varphi$ và $\dfrac{BM}{BC} = x$ $(0 < x < 1)$. Ta có

$$S_{MNPQ} = MN.MQ.\sin\varphi = xAC.(1-x)SB.\sin\varphi$$

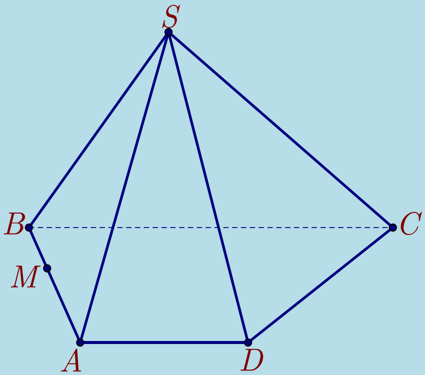
$$S_{RPQ} = 2S_{FRQ} = 2.\frac{1}{2}.FR.FQ.\sin\varphi = FR.FQ.\sin\varphi$$

$$= \left(\frac{x}{2}.SB\right).\left(\frac{x}{2}.AC\right)\sin\varphi = \frac{x^2}{4}.SB.AC.\sin\varphi$$

$$\Rightarrow S_{MNPRQ} = x\left(1 - \frac{3x}{4}\right).SB.AC.\sin\varphi \leq \frac{1}{3}SB.AC.\sin\varphi.$$

Dấu " = " xảy ra khi $x = \dfrac{2}{3}$ hay $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $BC = 2a, AD = a$, $AB = b$, SAD là tam giác đều. M di động trên cạnh AB. (α) đi qua M và song song với SA, BC. (α) cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Tính giá trị lớn nhất diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.



Giải Câu 9. Thiết diện là hình thang $MNPQ$.

Đặt $AM = x$. Theo định lý Talet ta có

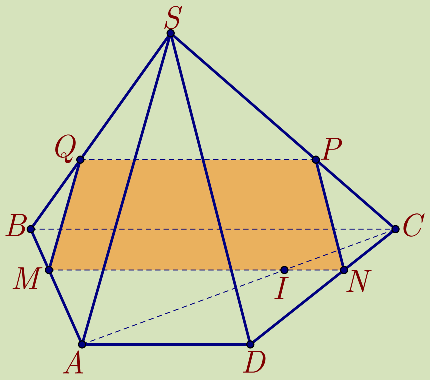
$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \frac{MQ}{a} = \frac{b-x}{b} \Rightarrow MQ = \frac{a(b-x)}{b}.$$

$$\frac{PN}{SD} = \frac{CN}{CD} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow PN = \frac{SD.BM}{BA} = \frac{a(b-x)}{b}.$$

Suy ra $MNPQ$ là hình thang cân. Ta có

$$MN = MI + IN = \frac{x}{b}.2a + \frac{b-x}{b}.a = \frac{ax+ab}{b}$$

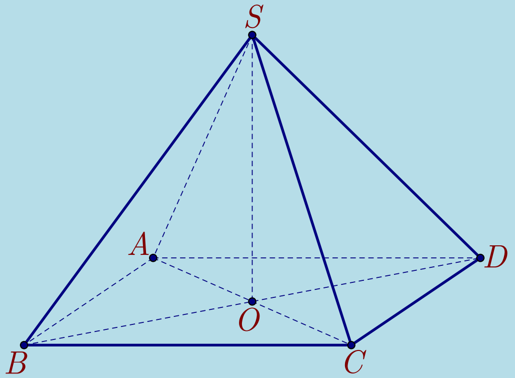
$$\frac{QP}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow QP = \frac{BC.AM}{AB} = \frac{2ax}{b}.$$



$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{MN+PQ}{2}.h = \frac{MN+PQ}{2}.\sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2}{12b^2}.(3x+b)(3b-3x) \le \frac{\sqrt{3}a^2}{12b^2}.\left(\frac{3x+b+3b-3x}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{3}.$$

Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất thể tích khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b.



Giải Câu 10.

Giả sử hình chóp đều $S.ABCD$ có O là tâm hình vuông $ABCD$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Đặt $OD = x \Rightarrow SO = \sqrt{b^2 - x^2}, 0 < x < b$. Do đó thể tích $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{2}{3}x^2\sqrt{b^2 - x^2}$.

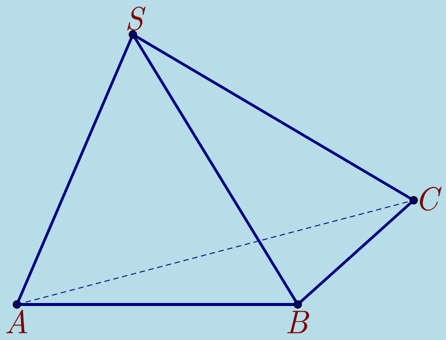
Đặt $t = \sqrt{b^2 - x^2}, 0 < t < b$ thì $V_{S.ABCD} = \frac{2}{3}(b^2 - t^2)t = \frac{2}{3}f(t)$ với $f(t) = b^2t - t^3$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$V = \frac{2}{3}x^2\sqrt{b^2 - x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^4(b^2 - x^2)} \le \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{x^2 + x^2 + 2b^2 - 2x^2}{3}\right)^3} = \frac{4b^3}{9\sqrt{3}}.$$

Vậy $V_{\max} = \frac{4b^3}{9\sqrt{3}}$.

Câu 11. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $\sqrt{2}a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$. Tính độ dài AB để thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.



Giải Câu 11.

Dựng hình vuông $ABCD$, cạnh bằng x, ta có $SD \perp (ABCD)$; đặt $SD = h$.

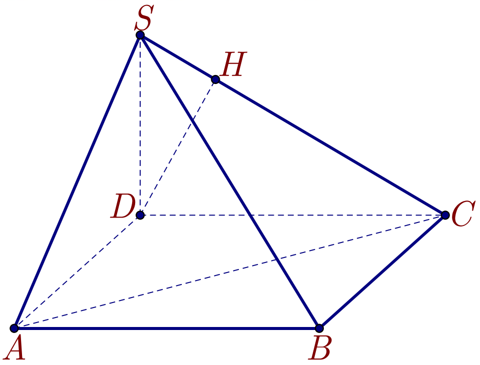
Dựng $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC)$ Ta có $d\left(A;(SBC)\right) = d\left(D;(SBC)\right) = DH = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow V = \frac{1}{6}h.x^2 = \frac{a^2}{3}.\frac{h^3}{h^2 - 2a^2}$$

Xét hàm số $f(h) = \dfrac{h^3}{h^2 - 2a^2}$ với $h > a\sqrt{2}$

Ta có $f'(h) = \dfrac{h^2\left(h^2 - 6a^2\right)}{3\left(h^2 - 2a^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow h = a\sqrt{6}$

Vậy $f(h)$ nhỏ nhất khi $h = a\sqrt{6} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.




Thank you!