

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TỈNH

TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

bằng cách lập tỉ số, phân chia, lắp ghép

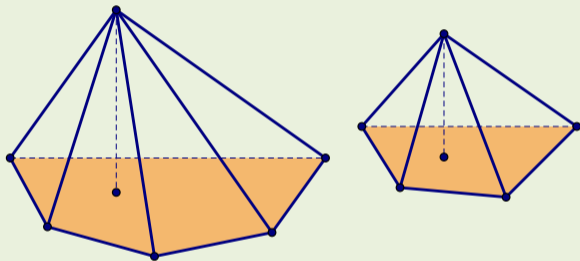
(tiếp)

I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

1. Tỉ số thể tích hai khối chóp

a) Cho khối chóp (I) có thể tích V_1 , diện tích đáy S_1 , đường cao h_1 và khối chóp (II) có thể tích V_2 , diện tích đáy S_2 , đường cao h_2 . Khi đó

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$



I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

1. Tỉ số thể tích hai khối chóp

b) Cho hình chóp **tam giác** $S.ABC$. Trên các tia SA, SB, SC lấy các điểm A', B', C' bất kỳ.

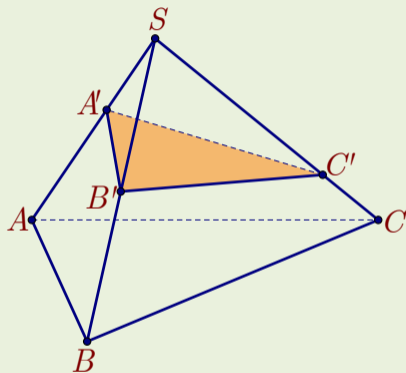
Khi đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Khi $A' \equiv A$ thì $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$

Khi $A' \equiv A, B' \equiv B$ thì $\frac{V_{S.ABC'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SC'}{SC}$

Lưu ý: Không tương tự cho hình chóp tứ giác



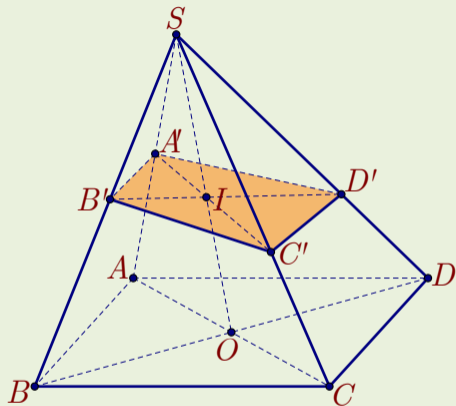
I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

1. Tỉ số thể tích hai khối chóp

c) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' .

Đặt $\frac{SA'}{SA} = x, \frac{SB'}{SB} = y, \frac{SC'}{SC} = z, \frac{SD'}{SD} = t$. Khi đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyzt \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)}{4}$$

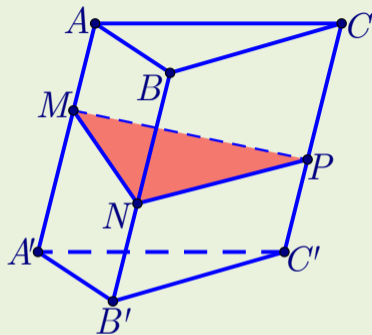


I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

2. Tỉ số thể tích liên quan đến khối lăng trụ tam giác

Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Các điểm M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh bên AA', BB', CC' . Khi đó

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$



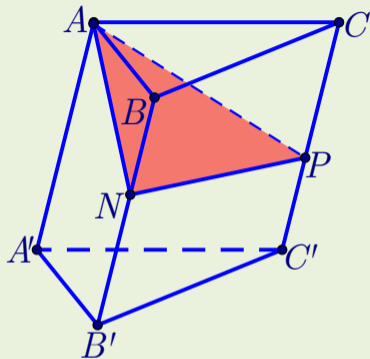
I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

2. Tỉ số thể tích liên quan đến khối lăng trụ tam giác

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

Đặc biệt, khi $M \equiv A$ thì

$$\frac{V_{ABCPN}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$



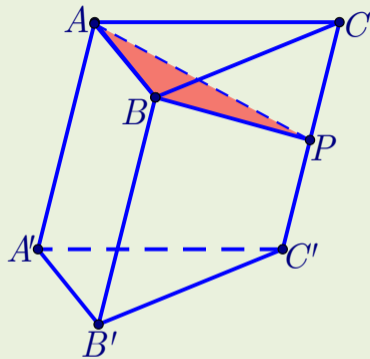
I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

2. Tỉ số thể tích liên quan đến khối lăng trụ tam giác

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)$$

Đặc biệt, khi $M \equiv A$ và $N \equiv B$ thì

$$\frac{V_{ABCP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{CP}{CC'}$$



I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

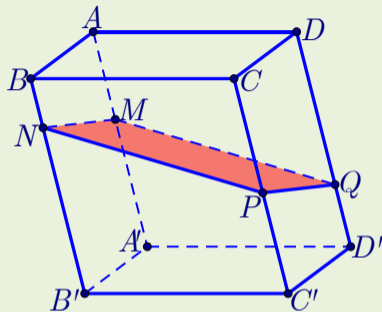
2. Tỉ số thể tích liên quan đến khối hộp

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{4} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'} \right)$$

Lưu ý: $\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$

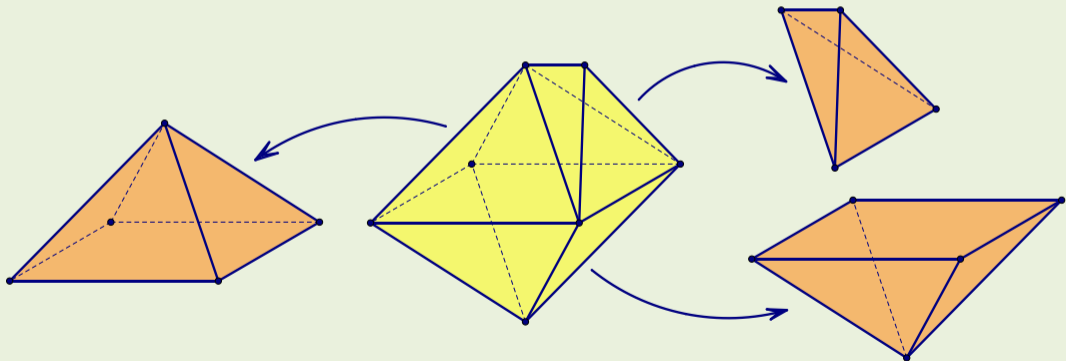
* Khi $M \equiv A$ thì $AM = AA = 0$.

Tương tự khi $N \equiv B, P \equiv C$.



II. PHÂN CHIA ĐỂ THỂ TÍCH

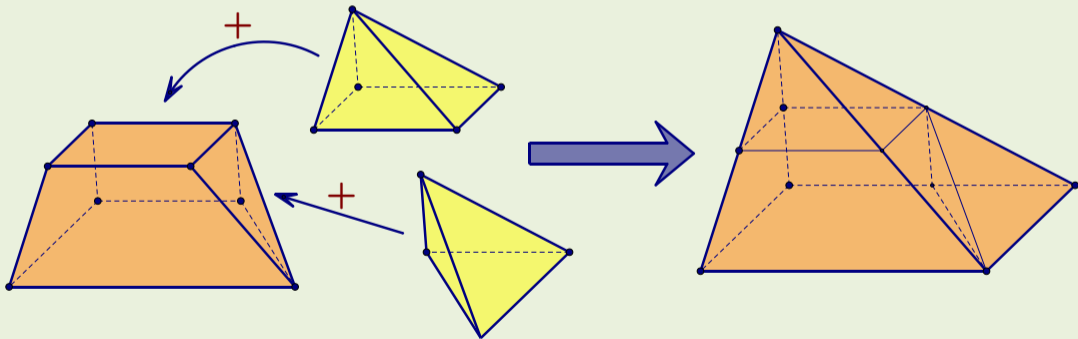
Để tính thể tích khối đa diện (H), ta phân chia (H) thành các khối đa diện nhỏ hơn (H_1), (H_2), ..., (H_n) sao cho thể tích của các khối đa diện nhỏ này là tính được bằng các công thức cơ bản. Khi đó $V_{(H)} = V_{(H_1)} + V_{(H_2)} + \dots + V_{(H_n)}$.

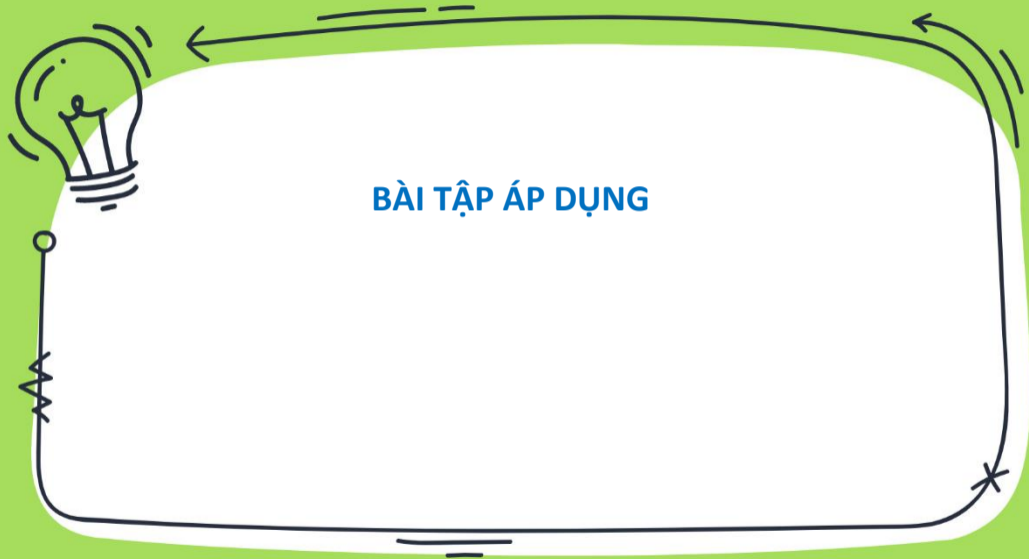


III. LẮP GHÉP ĐỂ THỂ TÍCH

Để tính thể tích khối đa diện (H) , ta ghép (H) với các khối đa diện $(H_1), (H_2), \dots, (H_n)$ để thành khối đa diện lớn hơn (H^*) . Khi đó

$$V_{(H)} = V_{(H^*)} - V_{(H_1)} - V_{(H_2)} - \dots - V_{(H_n)}.$$





Câu 1. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, SA vuông góc với $(ABCD)$, $\cos((SBC), (SBD)) = \sqrt{6}/3$. Gọi M, N, P, Q là trung điểm SB, SD, CD, BC . Tính $V_{A.MNPQ}$.

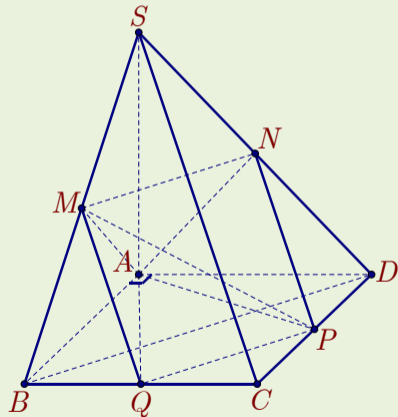
A. $1/3$.

B. $1/8$.

C. $1/12$.

D. $1/4$.

Giải.



Câu 1. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, SA vuông góc với $(ABCD)$, $\cos((SBC), (SBD)) = \sqrt{6}/3$. Gọi M, N, P, Q là trung điểm SB, SD, CD, BC . Tính $V_{A.MNPQ}$.

A. $1/3$.

B. $1/8$.

C. $1/12$.

D. $1/4$.

Giải. Đặt $SA = x$. Ta có

$$\sin((SBC), (SBD)) = \frac{d(C, (SBD))}{d(C, SB)}$$

$$= \frac{d(A, (SBD))}{BC} = \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

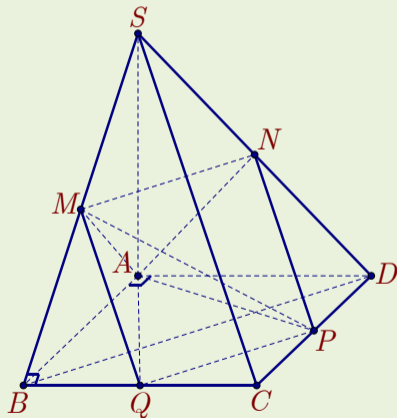
$\Rightarrow x = 1$. Ta có

$$V_{A.MNPQ} = 2V_{A.MPQ} = 2V_{M.APQ}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{APQ} \cdot d(M, (APQ)) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{8} S_{ABCD}\right) \cdot \frac{SA}{2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Chọn B.



Câu 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , $AB = 1$, $AD = 2$, $SA \perp (ABCD)$, $\cos((SBC), (SCD)) = \sqrt{130}/65$. Mặt phẳng (α) đi qua O và song song với (SAD) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối lớn.

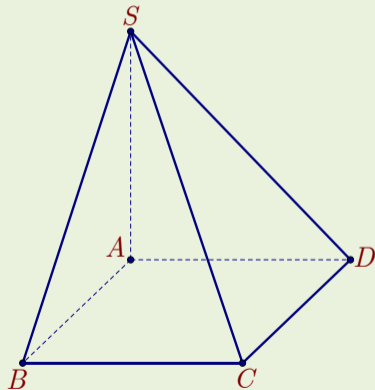
A. $5/8$.

B. $5/16$.

C. $11/16$.

D. $11/8$.

Giải.



Câu 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , $AB = 1$, $AD = 2$, $SA \perp (ABCD)$, $\cos((SBC), (SCD)) = \sqrt{130}/65$. Mặt phẳng (α) đi qua O và song song với (SAD) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối lớn.

A. $5/8$.

B. $5/16$.

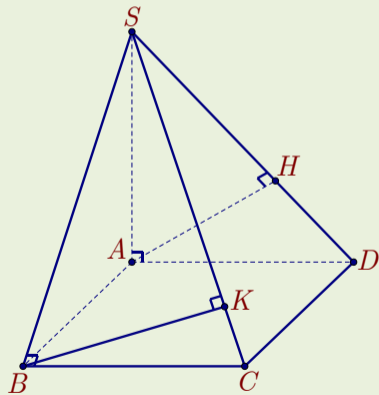
C. $11/16$.

D. $11/8$.

Giải. Đặt $SA = a$. Ta có

$$\sin((SBC), (SCD)) = \frac{d(B, (SCD))}{d(B, SC)} = \frac{d(A, (SCD))}{d(B, SC)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{455}}{65} = \frac{AH}{BK} = \frac{a \cdot 2}{\sqrt{a^2 + 4}} : \frac{\sqrt{a^2 + 1} \cdot 2}{\sqrt{a^2 + 5}} \Leftrightarrow a = 3.$$



Câu 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , $AB = 1$, $AD = 2$, $SA \perp (ABCD)$, $\cos((SBC), (SCD)) = \sqrt{130}/65$. Mặt phẳng (α) đi qua O và song song với (SAD) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối lớn.

A. $5/8$.

B. $5/16$.

C. $11/16$.

D. $11/8$.

Giải. Vậy $SA = 3$. Ta có

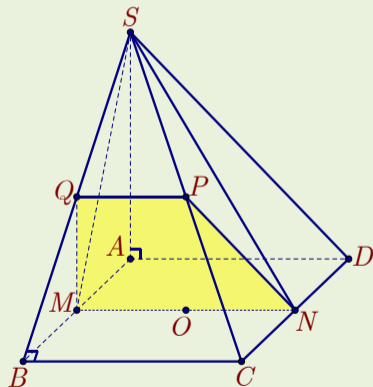
$$* V_{S.AMND} = (1/2) V_{S.ABCD}$$

$$* \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.MNBC}} = \frac{xyzt \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)}{4}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) (2 + 2 + 1 + 1)}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow V_{S.MNPQ} = (3/8) V_{S.MNBC} = (3/16) V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{\text{khối lớn}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\right) V_{S.ABCD} = \frac{11}{8} \cdot \text{Chọn D.}$$



Câu 3. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB' = 2\sqrt{2}$, $AD' = 5$, $CD' = 6$, $AC = 7$, $AB = BB'$, $\widehat{AB'D'} = 90^\circ$. Tính thể tích $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

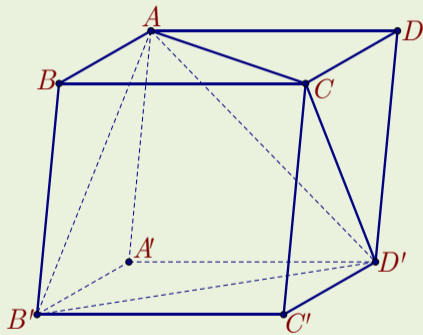
A. $24\sqrt{2}$.

B. $8\sqrt{2}$.

C. $32\sqrt{2}$.

D. $40\sqrt{2}$.

Giải.



Câu 3. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB' = 2\sqrt{2}$, $AD' = 5$, $CD' = 6$, $AC = 7$, $AB = BB'$, $\widehat{AB'D'} = 90^\circ$. Tính thể tích $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

A. $24\sqrt{2}$.

B. $8\sqrt{2}$.

C. $32\sqrt{2}$.

D. $40\sqrt{2}$.

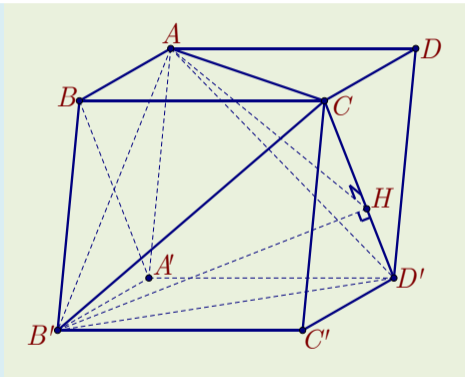
Giải. Ta có $ABB'A'$ là hình thoi $\Rightarrow AB' \perp A'B$
 $\Rightarrow AB' \perp CD'$, mà $AB' \perp B'D' \Rightarrow AB' \perp (B'CD')$
 Kẻ $B'H \perp CD'$. Mà $CD' \perp AB' \Rightarrow CD' \perp (AB'H)$
 $\Rightarrow CD' \perp AH$.

$$\text{Ta có } AH = \frac{2S_{ACD'}}{CD'} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{AH^2 - AB'^2} = 4$$

$$\Rightarrow V_{AB'CD'} = \frac{1}{3} \cdot AB' \cdot S_{B'CD'} = 8\sqrt{2}$$

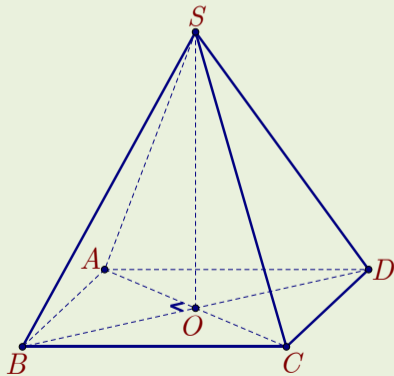
$$\Rightarrow V = V_{AB'CD'} + 4 \cdot (V/6) \Rightarrow V = 3V_{AB'CD'} = 24\sqrt{2}. \text{ Chọn A.}$$



Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , $SA > \sqrt{3}a/2$, $\tan(\angle SA, \text{mặt } SCD) = \sqrt{2}$. Gọi M, N, E, F là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh M, N, E, F, A, B, C, D .

- A. $19\sqrt{2}a^3/162$. B. $19\sqrt{2}a^3/54$. C. $17\sqrt{2}a^3/162$. D. $19\sqrt{2}a^3/54$.

Giải.



Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , $SA > \sqrt{3}a/2$, $\tan(\angle SA, \angle SCD) = \sqrt{2}$. Gọi M, N, E, F là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh M, N, E, F, A, B, C, D .

- A. $19\sqrt{2}a^3/162$. B. $19\sqrt{2}a^3/54$. C. $17\sqrt{2}a^3/162$. D. $19\sqrt{2}a^3/54$.

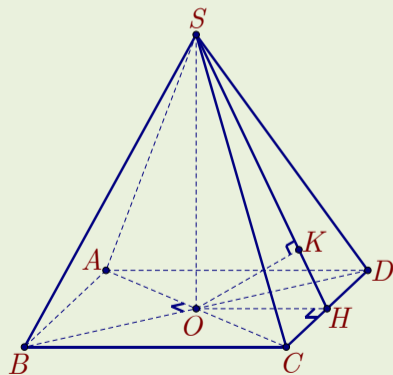
Giải. Đặt $SA = x$. Ta có

$$\sin(\angle SA, \angle SCD) = \frac{d(A, \angle SCD)}{SA} = \frac{2d(O, \angle SCD)}{SA}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2OK}{SA} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{2}} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}} : x$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 7a^2x^2 + 3a^4 = 0 \Leftrightarrow x = a, x = \sqrt{3}a/2$$

$$\Rightarrow x = a \text{ (vì } SA > \sqrt{3}a/2\text{)}.$$

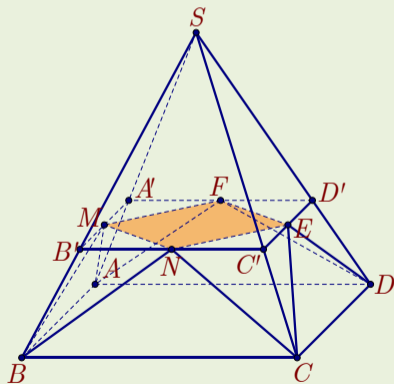


Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , $SA > \sqrt{3}a/2$, $\tan(\angle SA, \angle SCD) = \sqrt{2}$. Gọi M, N, E, F là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh M, N, E, F, A, B, C, D .

- A. $19\sqrt{2}a^3/162$. B. $19\sqrt{2}a^3/54$. C. $17\sqrt{2}a^3/162$. D. $19\sqrt{2}a^3/54$.

Giải. Ta có $SA = a$. Ta có

$$\begin{aligned}
 * \frac{V_{A'B'C'D'.ABCD}}{V_{S.ABCD}} &= 1 - \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \\
 * V_{C.NC'E} &= \frac{1}{2} V_{S.NC'E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} V_{S.A'B'C'D'} \\
 &= \frac{1}{16} V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{27} V_{S.ABCD} = \frac{8}{432} V_{S.ABCD} \\
 * V_{\text{cần tính}} &= V_{A'B'C'D'.ABCD} - 4V_{C.NC'E} \\
 &= \frac{19}{27} V_{S.ABCD} - 4 \cdot \frac{8}{432} V_{S.ABCD} = \frac{17}{27} V_{S.ABCD} \\
 &= 17\sqrt{2}a^3/162. \quad \text{Chọn C.}
 \end{aligned}$$



Câu 5. Hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng 2, góc giữa (ABC') và (ADC') bằng 60° . M là trung điểm BB' , P thuộc cạnh DD' sao cho $DD' = 4DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N . Tính thể tích khối đa diện $ABCDPNM$.

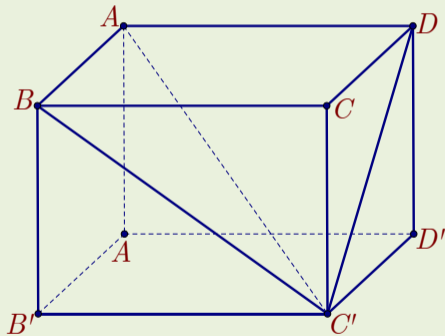
A. 2.

B. 3.

C. $9/4$.

D. $11/3$.

Giải.



Câu 5. Hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng 2, góc giữa (ABC') và (ADC') bằng 60° . M là trung điểm BB' , P thuộc cạnh DD' sao cho $DD' = 4DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N . Tính thể tích khối đa diện $ABCDPNM$.

A. 2.

B. 3.

C. 9/4.

D. 11/3.

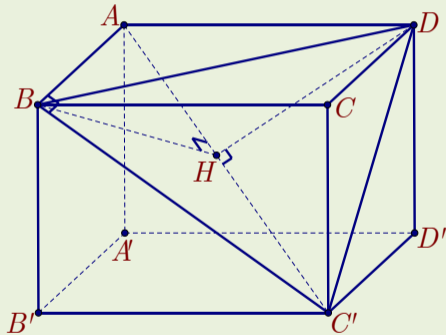
Giải. Ta có $\Delta ABC' = \Delta ADC'$ (c.c.c) nên chân đường cao kẻ từ B, D đến AC' trùng nhau ở H .

Khi đó $\widehat{BHD} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{BHD} = 120^\circ$.

$$\text{Đặt } AA' = x \Rightarrow BH = DH = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 8}}.$$

Nếu $\widehat{BHD} = 60^\circ \Rightarrow BH = BD \Rightarrow$ Vô nghiệm.

Nếu $\widehat{BHD} = 120^\circ \Rightarrow BD = \sqrt{3}BH \Rightarrow x = 2$.



Câu 5. Hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng 2, góc giữa (ABC') và (ADC') bằng 60° . M là trung điểm BB' , P thuộc cạnh DD' sao cho $DD' = 4DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N . Tính thể tích khối đa diện $ABCDPNM$.

A. 2.

B. 3.

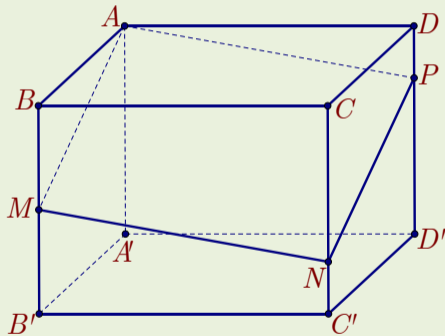
C. 9/4.

D. 11/3.

Giải. Vậy $AA' = 2$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{V_{ABCDPNM}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{AA'}{AA'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{CN}{CC'} + \frac{DP}{DD'} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \left(\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{ABCDPNM} = \frac{3}{8} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3. \text{ Chọn B.}$$



Thank
you

