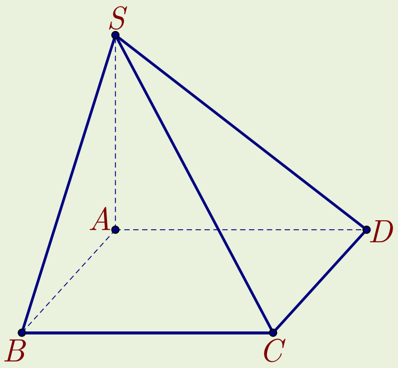
Chuyên đề Bồi dưỡng HSG Tỉnh

ÔN TẬP

THỂ TÍCH, KHOẢNG CÁCH, GÓC

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, SA vuông góc với $(ABCD)$, côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(SAD),(SBD)$ bằng $2/3$. Điểm M nằm trên cạnh SA. Tính độ dài đoạn thẳng AM biết rằng (MBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.



Giải. Đặt $SA = a$.

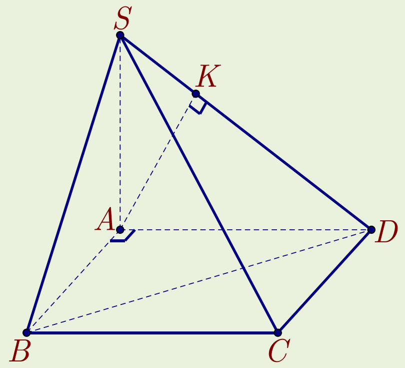
Ta có $\sin\big((SAD),(SBD)\big) = \sqrt{5}/3$ (1)

và $\sin\big((SAD),(SBD)\big) = \dfrac{d\big(A,(SBD)\big)}{d(A,SD)} = \dfrac{h}{AK}$ (2)

Vì AS, AB, AD đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AS^2} = 1 + 1 + \frac{1}{a^2} = \frac{2a^2+1}{a^2}$$

$\Rightarrow h = \dfrac{x}{\sqrt{2a^2+1}}$ (3)



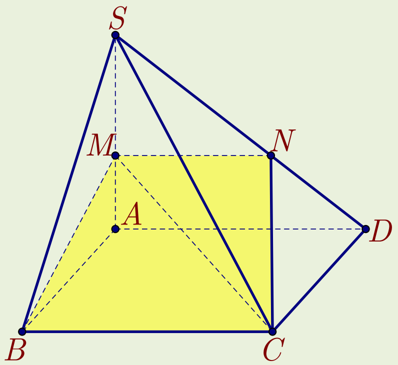
Ta có $AK = \dfrac{AS.AD}{\sqrt{AS^2+AD^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ (4). Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow a = 2 \Rightarrow SA = 2$.

Giải. Ta có $SA = 2$. Đặt $SM/SA = x > 0$.

Kẻ $MN//BC$ $(N \in SD)$. Ta có

$$\frac{V_{S.MBCN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyzt.\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)}{4}$$

$$= \frac{x.1.1.x.\left(\frac{1}{x} + 1 + 1 + \frac{1}{x}\right)}{4} = \frac{x + x^2}{2}$$

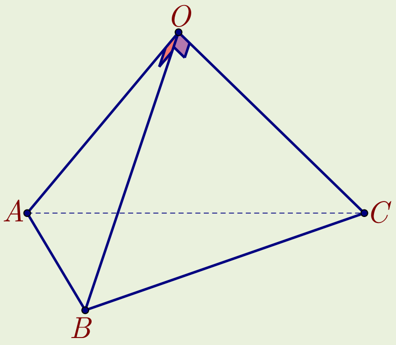


Từ giả thiết suy ra

$$\frac{x + x^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow AM = SA - SM = 2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.2 = 3 - \sqrt{5}.$$

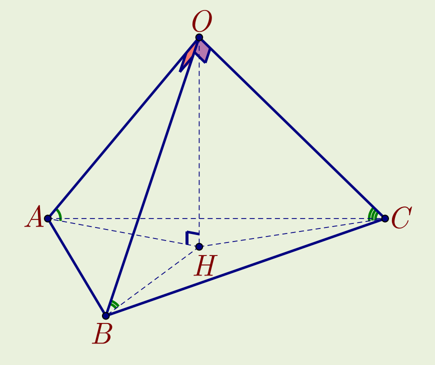
Câu 2. Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi x, y, z lần lượt là góc tạo bởi OA, OB, OC với (ABC). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (3 + \cot^2 x)(3 + \cot^2 y)(3 + \cot^2 z).$$



Giải. Kẻ $OH \perp (ABC)$. Khi đó $x = \widehat{OAH}, y = \widehat{OBH}$, $z = \widehat{OCH}$ và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = \frac{OH^2}{OA^2} + \frac{OH^2}{OB^2} + \frac{OH^2}{OC^2}$$
$$= 1.$$



Đặt $a = \sin^2 x, b = \sin^2 y, c = \sin^2 z$. Ta có

$$1 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1/27.$$

Ta có

$$S = (3 + \cot^2 x)(3 + \cot^2 y)(3 + \cot^2 z) = \left(2 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(2 + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(2 + \frac{1}{\sin^2 z}\right)$$

$$1 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1/27.$$

Ta có

$$S = (3 + \cot^2 x)(3 + \cot^2 y)(3 + \cot^2 z) = \left(2 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(2 + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(2 + \frac{1}{\sin^2 z}\right)$$

$$= \left(2 + \frac{1}{a}\right)\left(2 + \frac{1}{b}\right)\left(2 + \frac{1}{c}\right).$$

Dự đoán S nhỏ nhất khi $a = b = c = 1/3$. Ta có

$$2 + \frac{1}{a^2} = 1 + 1 + \frac{1}{3a} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{3a} \geq 5\sqrt[5]{1/(27a^3)}$$

Tương tự cho các BĐT còn lại. Suy ra

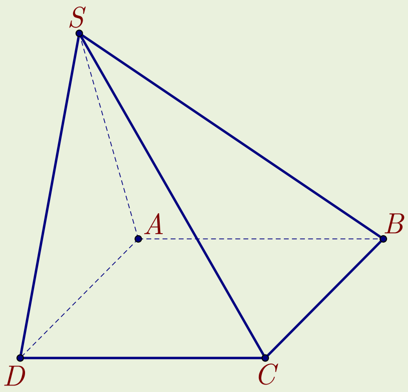
$$S \geq 125\sqrt[5]{1/(27abc)^3} \geq 125 \ \ (\text{vì } abc \leq 1/27)$$

Dấu " = " xảy ra khi $a = b = c = 1/3$ hay $\sin x = \sin y = \sin z = \sqrt{3}/3$.

Câu 3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng 2, $\widehat{ABC} = 60^0$, tam giác SAD cân tại S ($SA \neq AD$) và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết rằng $\sin\big(SA, (SBC)\big) = \sqrt{6}/4$.

a) Tính khoảng cách giữa AB và SC.

b) Gọi M là trung điểm SD, lấy N thuộc cạnh SC sao cho $SN = 2NC$. Gọi P là giao điểm của (AMN) với BC. Tính thể tích khối đa diện $AMNPCD$.



Câu 3. H là trung điểm $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

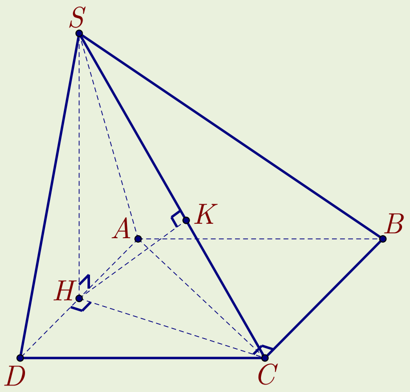
Đặt $SH = x$. Từ giả thiết suy ra ABC, ADC là các tam giác đều cạnh bằng 2. Ta có $SA = \sqrt{x^2+1}$.

$$\sin\left(SA,(SBC)\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow \frac{d\left(A,(SBC)\right)}{SA} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Ta có

$$d\left(A,(SBC)\right) = d(H,SBC)) = HK$$

$$= \frac{HS.HC}{\sqrt{HS^2+HC^2}} = \frac{x.\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}}.$$



Từ đó suy ra $x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3, x^2 = 1$.

Vì $SA \neq AD$ nên $x^2 = 1$ hay $SH = 1$.

Câu 3. Vậy $SH = 1$.

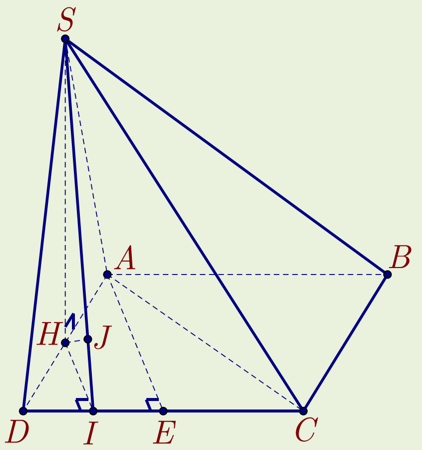
***a*) Tính khoảng cách giữa *AB* và *SC*.** Ta có

$$d(AB, SC) = d\big(AB, (SCD)\big) = d\big(A, (SCD)\big)$$

$$= 2d\big(H, (SCD)\big) = 2HJ$$

$$= 2.\frac{HS.HI}{\sqrt{HS^2 + HI^2}}$$

$$= 2.\frac{1.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$



Câu 3. ***b***) Gọi $Q = MN \cap CD$

$\Rightarrow P = AQ \cap BC$. Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSCD với cát tuyến MNQ ta có

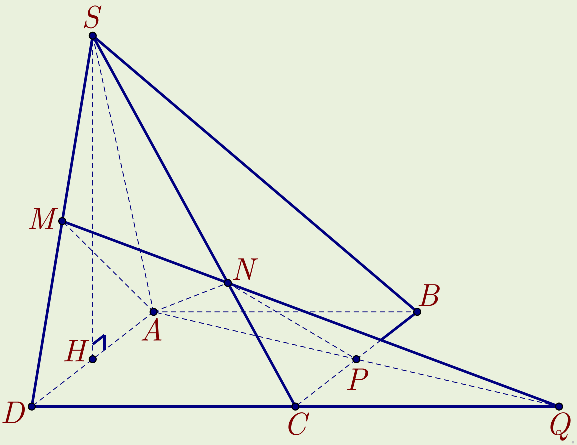
$$\frac{MD}{MS} \cdot \frac{NS}{NC} \cdot \frac{QC}{QD} = 1 \Rightarrow 1.2.\frac{QC}{QD} = 1$$

$\Rightarrow C$ là trung điểm DQ

Ta có $V_{AMNPCD} = V_{M.ADQ} - V_{N.CPQ}$.

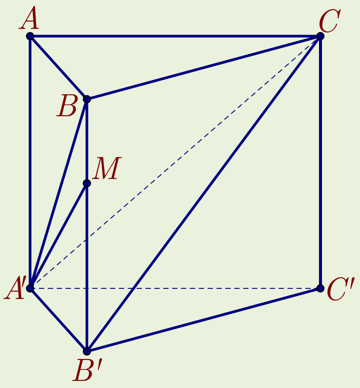
Ta có

$$V_{M.ADQ} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2.4.\sin 60^0\right) \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}/3.$$



$$V_{N.CPQ} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1.2.\sin 60^0\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{18} \Rightarrow V_{AMNPCD} = \frac{5\sqrt{3}}{18}.$$

Câu 4. Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc giữa $(A'BC)$ và $(BCC'B')$ bằng 45^0. Trên cạnh BB' lấy điểm M sao cho $B'M = 2BM$. Biết rằng $A'M$ vuông góc với $B'C$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

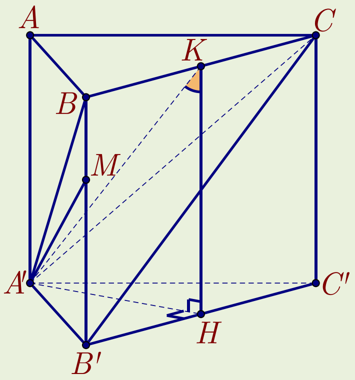


Giải. Đặt $AA' = x$. Kẻ $AH \perp B'C'$ (H là trung điểm $B'C'$). Kẻ $HK \perp BC$ (K là trung điểm BC)
$\Rightarrow \widehat{A'KH} = 45^0 \Rightarrow A'H = KH = AA' = x$.
Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'M}.\overrightarrow{B'C} &= \left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'M}\right)\left(\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B'M}.\overrightarrow{B'B}\\ &= -a^2 + a.a.\cos\alpha + \frac{2}{3}x^2 = 0 \ (1).\end{aligned}$$

Trong tam giác vuông $A'B'H$ ta có

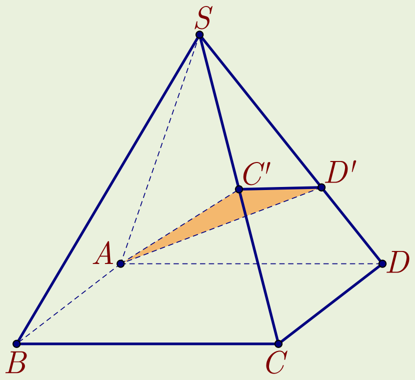
$$x = A'H = A'B'.\cos\widehat{B'A'H} = a.\cos\frac{\alpha}{2} \ (2).$$



Từ (1), (2)suy ra $-1 + \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) + \frac{2}{3}.\cos^2\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{3a^3}{8}.$$

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC tại C' đồng thời cắt SD tại D'. Biết rằng $\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3}$. Tính thể tích khối chóp $A.CDD'C'$.



Câu 5. Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Vì $(AC'D') \perp SC$ nên $AC' \perp SC, C'D' \perp SD$.

Đặt $SA = SB = SC = SD = x \Rightarrow SD' = 2x/3$.

Ta có $\cos \widehat{BSC} = \dfrac{2x^2 - a^2}{2x^2} \Rightarrow SC' = \dfrac{2x^2 - a^2}{3x}$.

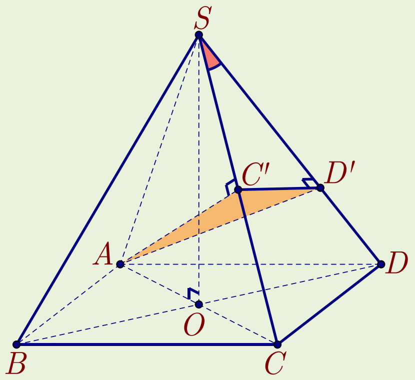
Xét tam giác SAC' và SAC ta có

$$\frac{SC'}{SA} = \cos \widehat{ASC} \Rightarrow \frac{2x^2 - a^2}{3x^2} = \frac{2x^2 - 2a^2}{2x^2}$$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}a \Rightarrow \Delta SAC$ đều cạnh $\sqrt{2}a$. Ta có

$$\frac{V_{A.CDD'C'}}{V_{S.ACD}} = 1 - \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = 1 - \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

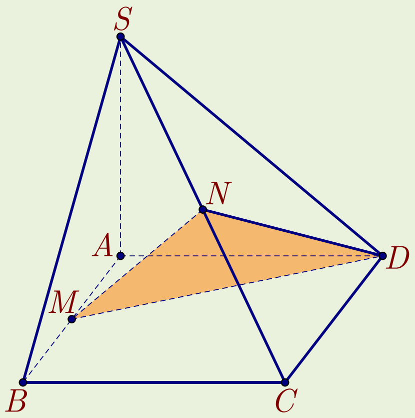
$$\Rightarrow V_{A.CDD'C'} = \frac{2}{3}.V_{S.ACD} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}a^2.\frac{\sqrt{6}a}{2} = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}.$$



Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, $SA = 2a$ vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC.

a) Tính côsin của góc giữa (DMN) và (SCD).

b) Hai đường thẳng AN, MN cắt (SBD) tại I, H. Tính thể tích khối tứ diện $CNIH$.



Giải. a) Tính $\cos\big((DMN),(SCD)\big)$. Ta có

$$\sin\big((DMN),(SCD)\big)=\frac{d\big(M,(SCD)\big)}{d(M,DN)}.$$

Ta có

$$d\big(M,(SCD)\big)=d\big(A,(SCD)\big)=AH=2\sqrt{5}a/5.$$

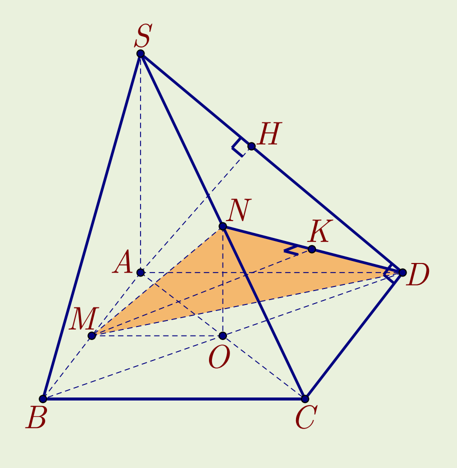
Ta có

$$MN=\sqrt{MO^2+ON^2}=\sqrt{5}a/2$$

$$MD=\sqrt{MA^2+AD^2}=\sqrt{5}a/2\Rightarrow MD=MN$$

$$ND=SC/2=\sqrt{6}a/2$$

$$\Rightarrow d(M,DN)=MK=\sqrt{MN^2-NK^2}=\sqrt{14}a/4$$



$$\Rightarrow \sin\big((DMN),(SCD)\big)=\frac{4\sqrt{70}}{35}\Rightarrow \cos\big((DMN),(SCD)\big)=\frac{\sqrt{105}}{35}.$$

Giải. $b)$ Hai đường thẳng AN, MN cắt (SBD) tại I, H. Tính thể tích khối tứ diện $CNIH$.

***) Xác định $\boldsymbol{I = AN \cap (SBD)}$.**

Mặt phẳng chứa AN là (SAC).

Gọi $O = AC \cap BD$.

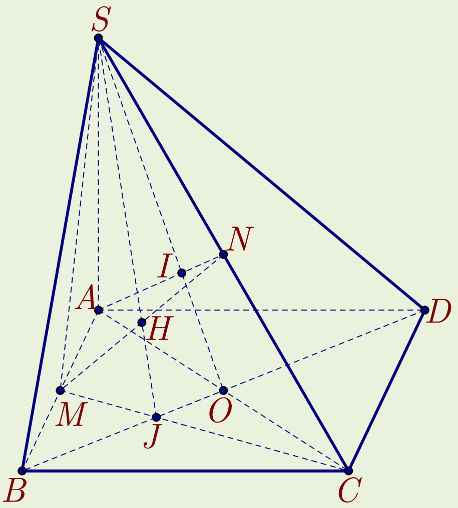
Ta có $(SAC) \cap (SBD) = SO \Rightarrow I = AN \cap SO$.

***) Xác định $\boldsymbol{H = MN \cap (SBD)}$.**

Mặt phẳng chứa MN là (SMC).

Gọi $J = MC \cap BD$.

Ta có $(SMC) \cap (SBD) = SJ \Rightarrow H = MN \cap SJ$.



Giải. b) Tính thể tích khối tứ diện $CNIH$.

Ta có I là trọng tâm của $\Delta SAC \Rightarrow \dfrac{NI}{NA} = \dfrac{1}{3}$.

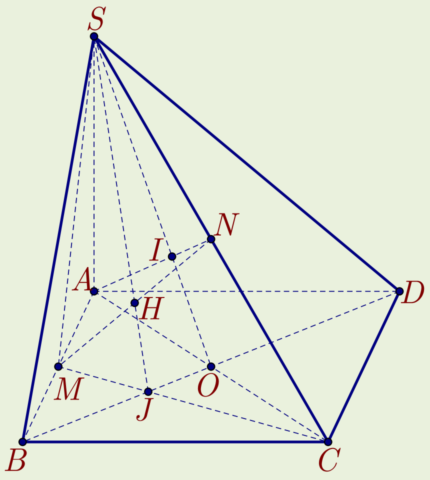
Áp dụng định lý Menelaus cho ΔMNC với cát tuyến SHJ ta có

$$\frac{SC}{SN}.\frac{HN}{HM}.\frac{JM}{JC} = 1 \Rightarrow 2.\frac{HN}{HM}.\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{HN}{HM} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{V_{N.IHC}}{V_{NAMC}} = \frac{NI}{NA}.\frac{NH}{NM} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow V_{N.IHC} = \frac{1}{6}V_{N.AMC} = \frac{1}{12}V_{S.AMC} = \frac{1}{48}V_{S.ABCD}$$

$$= \frac{1}{48}.\frac{1}{3}.a^2.2a = \frac{a^3}{72}.$$




Good luck