CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TỈNH

# TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

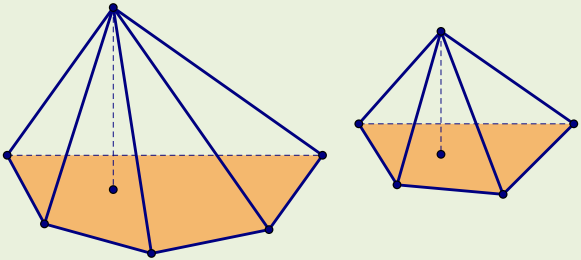
## bằng cách lập tỉ số, phân chia, lắp ghép

## I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

### 1. Tỉ số thể tích hai khối chóp

a) Cho khối chóp $(I)$ có thể tích $V_1$, diện tích đáy $S_1$, đường cao $h_1$ và khối chóp $(II)$ có thể tích $V_2$, diện tích đáy $S_2$, đường cao $h_2$. Khi đó

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$



# I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

## 1. Tỉ số thể tích hai khối chóp

b) Cho hình chóp **tam giác** $S.ABC$. Trên các tia $SA, SB, SC$ lấy các điểm $A', B', C'$ bất kỳ.

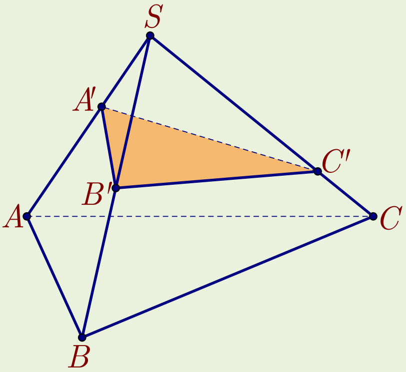
Khi đó

$$\boldsymbol{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}}$$

Khi $A' \equiv A$ thì $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$

Khi $A' \equiv A,\ B' \equiv B$ thì $\frac{V_{S.ABC'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SC'}{SC}$

**Lưu ý:** Không tương tự cho hình chóp tứ giác



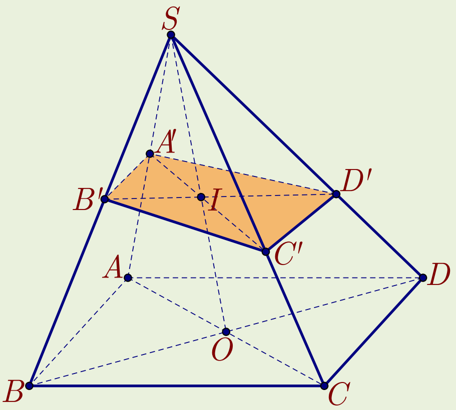
# I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

## 1. Tỉ số thể tích hai khối chóp

c) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng cắt các cạnh $SA, SB, SC, SD$ lần lượt tại $A', B', C', D'$.

Đặt $\frac{SA'}{SA} = x, \frac{SB'}{SB} = y, \frac{SC'}{SC} = z, \frac{SD'}{SD} = t$. Khi đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyzt.\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)}{4}$$



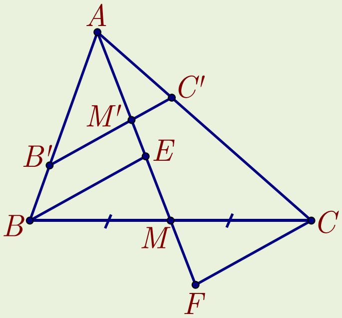
**BỔ ĐỀ.** Cho tam giác $ABC$ có trung tuyến $AM$. $B', C'$ bất kỳ thuộc cạnh $AB, AC$. $M'$ là giao điểm của $B'C'$ và $AM$. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = 2.\frac{AM}{AM'}$.

**Chứng minh:** Kẻ $BE, CF$ song song với $B'C'$ ($E, F$ thuộc $AM$). Ta có

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = \frac{AE}{AM'} + \frac{AF}{AM'} = \frac{AE + AF}{AM'}$$

$$= \frac{(AM - ME) + (AM + MF)}{AM'}$$

$$= \frac{2AM}{AM'}$$



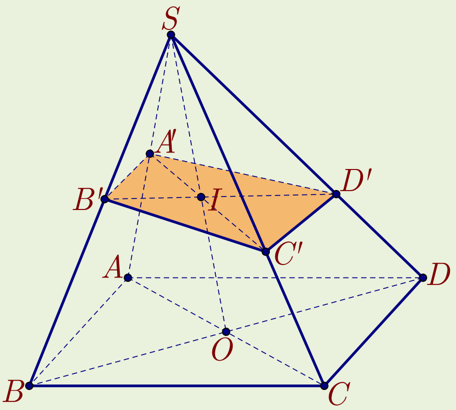
C/m $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{xyzt.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)}{4}$

Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{t} \Rightarrow VP = \dfrac{xyz+xzt}{2}$

$$VT = \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} + \frac{1}{2}.\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ADC}}$$

$$= \frac{1}{2}xyz + \frac{1}{2}xzt = VP$$

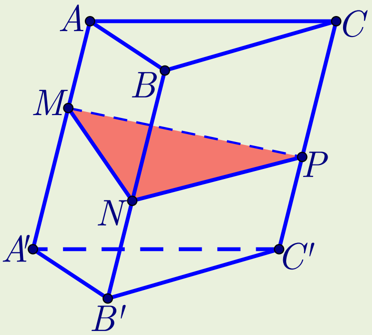


# I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

## 2. Tỉ số thể tích liên quan đến khối lăng trụ tam giác

Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Các điểm $M, N, P$ lần lượt nằm trên các cạnh bên $AA', BB', CC'$. Khi đó

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}\right)$$



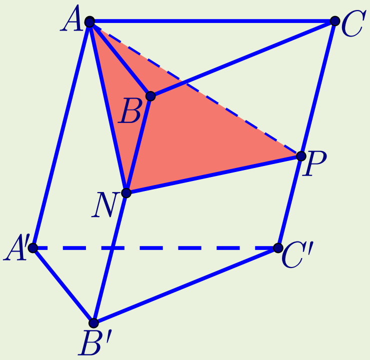
# I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

**2. Tỉ số thể tích liên quan đến khối lăng trụ tam giác**

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}\right)$$

Đặc biệt, khi $M \equiv A$ thì

$$\frac{V_{ABCPN}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}\left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}\right)$$



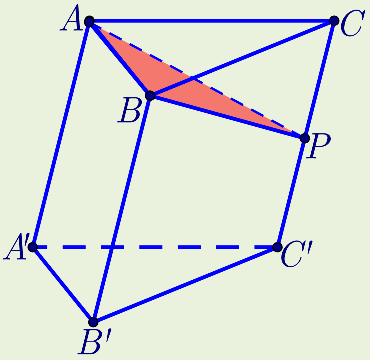
# I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

## 2. Tỉ số thể tích liên quan đến khối lăng trụ tam giác

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}\right)$$

Đặc biệt, khi $M \equiv A$ và $N \equiv B$ thì

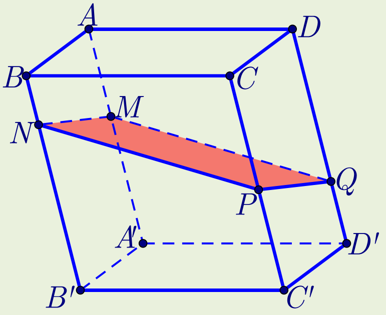
$$\frac{V_{ABCP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{CP}{CC'}$$



# I. TỈ SỐ THỂ TÍCH

## 2. Tỉ số thể tích liên quan đến khối hộp

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{4}\left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'}\right)$$



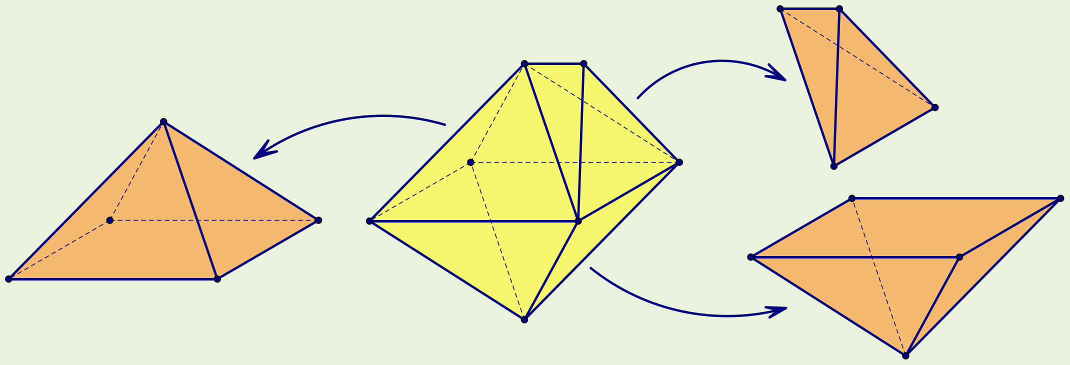

Lưu ý: $\dfrac{AM}{AA'} + \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{BN}{BB'} + \dfrac{DQ}{DD'}$

* Khi $M \equiv A$ thì $AM = AA = 0$.

Tương tự khi $N \equiv B,\ P \equiv C$.

## II. PHÂN CHIA ĐỂ THỂ TÍCH

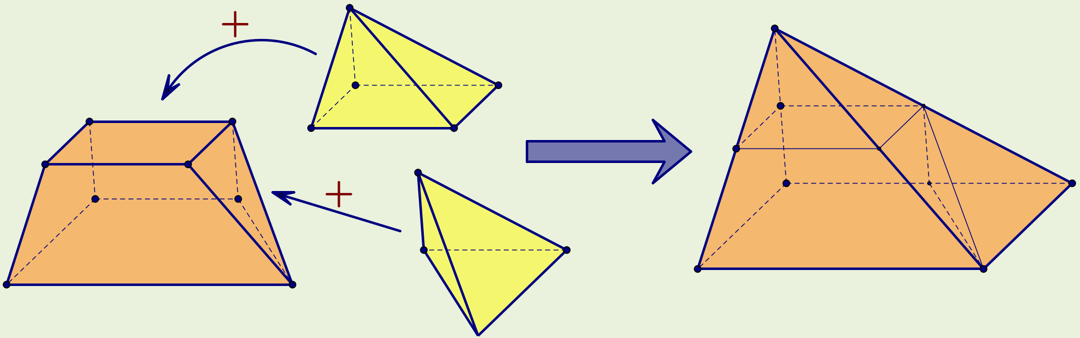
Để tính thể tích khối đa diện $(H)$, ta phân chia $(H)$ thành các khối đa diện nhỏ hơn $(H_1), (H_2), \ldots, (H_n)$ sao cho thể tích của các khối đa diện nhỏ này là tính được bằng các công thức cơ bản. Khi đó $V_{(H)} = V_{(H_1)} + V_{(H_2)} + \cdots + V_{(H_n)}$.



## III. LẮP GHÉP ĐỂ THỂ TÍCH

Để tính thể tích khối đa diện $(H)$, ta ghép $(H)$ với các khối đa diện $(H_1), (H_2), \dots, (H_n)$ để thành khối đa diện lớn hơn $(H^*)$. Khi đó

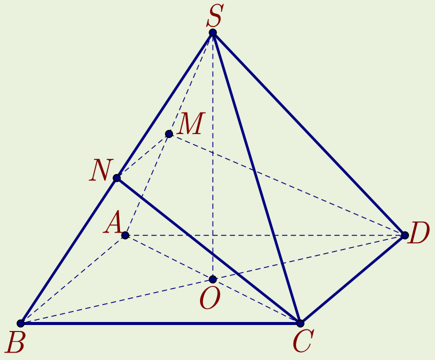
$$V_{(H)} = V_{(H^*)} - V_{(H_1)} - V_{(H_2)} - \cdots - V_{(H_n)}.$$



**Câu 1.** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm $O$, $AD = 2CD$, $SO \perp (ABCD)$, $BD = 6$, $\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = 60^0$. $M, N$ là trung điểm $SA, SB$. Tính $V_{ABCDMN}$.

**A.** $128\sqrt{15}/15$. **B.** $16\sqrt{15}/15$. **C.** $18\sqrt{15}/15$. **D.** $108\sqrt{15}/25$.

**Giải.**



**Câu 1.** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm $O$, $AD = 2CD$, $SO \perp (ABCD)$, $BD = 6$, $\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = 60^0$. $M, N$ là trung điểm $SA, SB$. Tính $V_{ABCDMN}$.

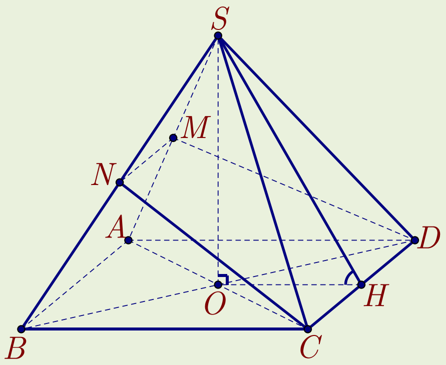
**A.** $128\sqrt{15}/15$. **B.** $16\sqrt{15}/15$. **C.** $18\sqrt{15}/15$. **D.** $108\sqrt{15}/25$.

**Giải.** Từ $AD = 2CD, BD = 6 \Rightarrow CD = 6\sqrt{5}/5$ và $AD = 12\sqrt{5}/5$. Kẻ $OH \perp CD \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^0$ $\Rightarrow SO = OH.\tan 60^0 = 6\sqrt{15}/5$. Ta có

$$\frac{V_{S.MNCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyzt.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)}{4}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1.1\right).(2+2+1+1)}{4} = \frac{3}{8}$$

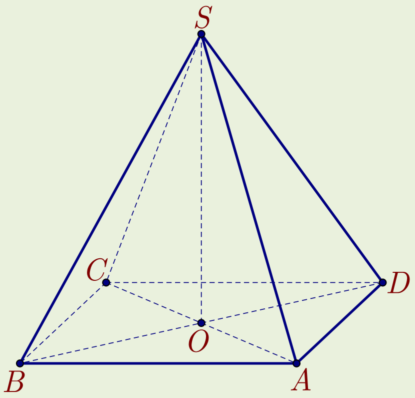
$$\Rightarrow V_{ABCDMN} = \frac{5}{8}V_{S.ABCD} = \frac{18\sqrt{15}}{5}.$$ **Chọn C.**



**Câu 2.** Chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $\alpha$ với $\cos\alpha = 1/3$. Mặt phẳng $(P)$ chứa $AC$ và vuông góc với $(SAD)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích của khối đa diện lớn.

**A.** $3\sqrt{2}a^3/10$. **B.** $\sqrt{2}a^3/3$. **C.** $\sqrt{2}a^3/30$. **D.** $9\sqrt{2}a^3/10$.

**Giải.**



**Câu 2.** Chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $\alpha$ với $\cos\alpha = 1/3$. Mặt phẳng $(P)$ chứa $AC$ và vuông góc với $(SAD)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích của khối đa diện lớn.

**A.** $3\sqrt{2}a^3/10$. **B.** $\sqrt{2}a^3/3$. **C.** $\sqrt{2}a^3/30$. **D.** $9\sqrt{2}a^3/10$.

**Giải.** Kẻ $OH \perp CD \Rightarrow \widehat{SHO} = \alpha \Rightarrow SO = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow SC = SD = \sqrt{10}a/2$.

Kẻ $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SAD) \Rightarrow (ACK) \perp (SAD)$

$\Rightarrow (P) \equiv (ACK)$. Gọi $E = AK \cap SD$.

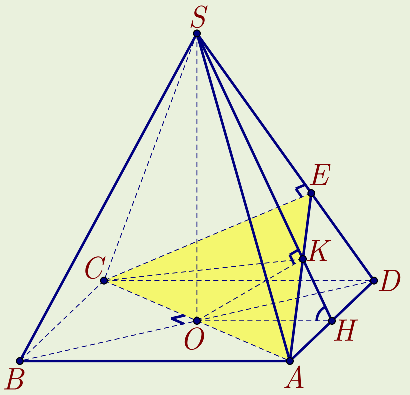
Ta có $SD \perp AC, SD \perp OK \Rightarrow SD \perp (ACE)$

$\Rightarrow SD \perp CE$. Ta có

$$\frac{SE}{SD} = \frac{SE}{SC} = \cos\widehat{CSD} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{ED}{SD} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{E.ACD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{ACD}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{d(E,(ABCD))}{d(S,(ABCD))} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

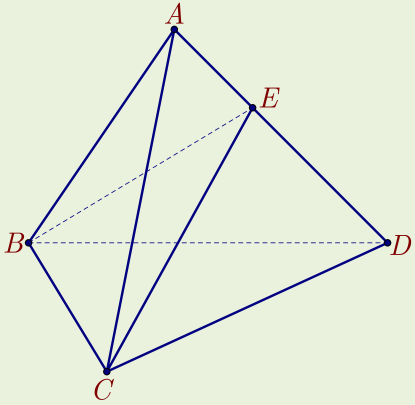
$\Rightarrow V_{\text{khối lớn}} = (9/10).V_{S.ABCD} = 3\sqrt{2}a^3/10 \Rightarrow$ **A.**



**Câu 3.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh 1. $E$ thuộc cạnh $AD$ sao cho $\left(\widehat{(BCD),(BCE)}\right) = \alpha$ thoả mãn $\tan \alpha = 5\sqrt{2}/7$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCE$.

**A.** $3\sqrt{2}/32$. **B.** $3\sqrt{2}/160$. **C.** $\sqrt{2}/32$. **D.** $5\sqrt{2}/96$.

**Giải.**



**Câu 3.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh 1. $E$ thuộc cạnh $AD$ sao cho $(\widehat{(BCD),(BCE)}) = \alpha$ thoả mãn $\tan\alpha = 5\sqrt{2}/7$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCE$.

**A.** $3\sqrt{2}/32$. **B.** $3\sqrt{2}/160$. **C.** $\sqrt{2}/32$. **D.** $5\sqrt{2}/96$.

**Giải.** Gọi $O$ là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow AO \perp (BCD)$. Gọi $M$ là trung điểm $BC \Rightarrow EM, DM$ cùng vuông góc với $BC \Rightarrow \widehat{EMD} = \alpha$. Kẻ $EH \perp MD$.

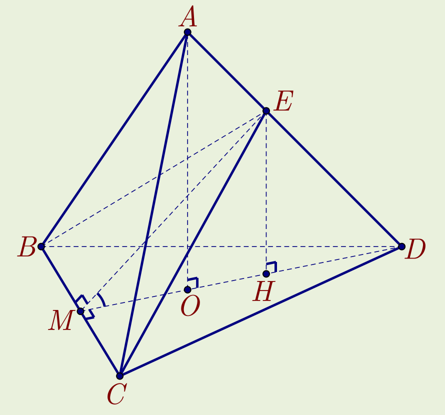
Đặt $\dfrac{DE}{DA} = x \Rightarrow EH = x.AO = \sqrt{6}x/3$.

Ta có $MH = DM - DH = DM - xDO$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - x.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x}{6}.$$

Từ $\tan\alpha = \dfrac{5\sqrt{2}}{7} \Rightarrow x = \dfrac{5}{8} \Rightarrow \dfrac{EH}{AO} = \dfrac{5}{8}$

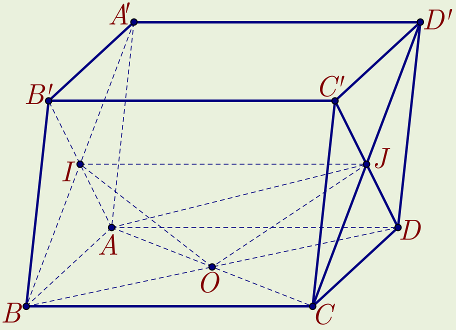
$\Rightarrow V_{ABCE} = \left(1 - \dfrac{5}{8}\right)V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{32}$. **Chọn C.**



**Câu 4.** Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi tâm $O$, cạnh $a$, $\widehat{BAC} = 60^0$. Gọi $I, J$ lần lượt là tâm các mặt $ABB'A', CDD'C'$. Biết rằng $AB' = \sqrt{7}a$, $AA' = 2a$, góc giữa $(ABB'A')$ và $(ABCD)$ bằng $60^0$. Tính thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

**A.** $3\sqrt{3}a^3/64$. **B.** $\sqrt{3}a^3/48$. **C.** $\sqrt{3}a^3/32$. **D.** $\sqrt{3}a^3/192$.

**Giải.**



**Câu 4.** Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi tâm $O$, cạnh $a$, $\widehat{BAC}=60^0$. Gọi $I,J$ lần lượt là tâm các mặt $ABB'A', CDD'C'$. Biết rằng $AB'=\sqrt{7}a$, $AA'=2a$, góc giữa $(ABB'A')$ và $(ABCD)$ bằng $60^0$. Tính thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

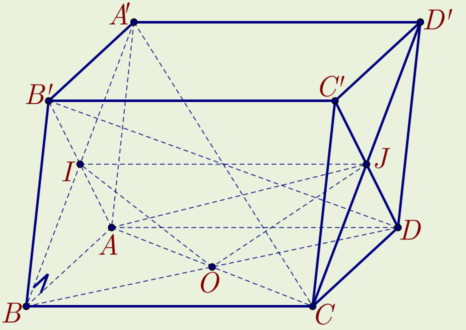
**A.** $3\sqrt{3}a^3/64$. **B.** $\sqrt{3}a^3/48$. **C.** $\sqrt{3}a^3/32$. **D.** $\sqrt{3}a^3/192$.

**Giải.** Sử dụng CT trung tuyến $AI$ trong $\Delta ABA'$ suy ra $A'B=\sqrt{3}a$. Áp dụng Pitago đảo suy ra $\widehat{A'BA}=90^0 \Rightarrow S_{A'BA}=\sqrt{3}a^2/2$.

Ta có $V_{A'.ABC}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{S_{A'AB}.S_{ABC}.\sin 60^0}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$

Ta có

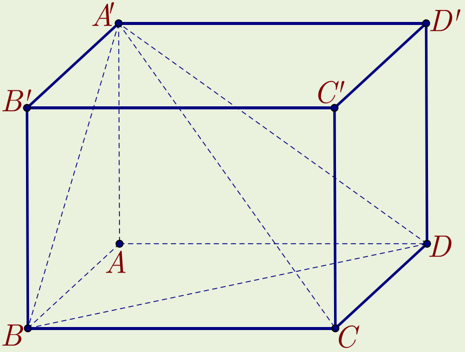
$$V_{A.OIJ}=\frac{1}{3}d\big(O,(AB'D)\big).S_{AIJ}$$
$$=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}d\big(B,(AB'D)\big).\frac{1}{2}S_{AB'D}=\frac{1}{4}V_{B.AB'D}$$
$$=V_{A'.ABC}/4=\sqrt{3}a^3/32.$$ **Chọn C.**



**Câu 5**. Lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh 4, $\widehat{BAD} = 120^0$, tang của góc giữa $A'C$ và $(A'BD)$ bằng $2/9$, cạnh bên lớn hơn cạnh đáy. Gọi $M, N, P$ là trung điểm của $B'A, B'C, B'D$. Tính thể tích khối đa diện lồi có cách đỉnh là $A, B, C, M, N, P$.

**A.** $12\sqrt{3}$. **B.** $28\sqrt{3}/3$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** $40\sqrt{3}/3$.

**Giải.**



**Câu 5.** Lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh 4, $\widehat{BAD} = 120^0$, tang của góc giữa $A'C$ và $(A'BD)$ bằng $2/9$, cạnh bên lớn hơn cạnh đáy. Gọi $M, N, P$ là trung điểm của $B'A, B'C, B'D$. Tính thể tích khối đa diện lồi có cách đỉnh là $A, B, C, M, N, P$.

**A.** $12\sqrt{3}$. **B.** $28\sqrt{3}/3$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** $40\sqrt{3}/3$.

**Giải.** Đặt $AA' = x > 4$. Ta có

$$\sin\left(A'C,(A'BD)\right) = \frac{d\left(C,(A'BD)\right)}{A'C} = \frac{AH}{A'C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{85}}{85} = \frac{x.2}{\sqrt{x^2+2^2}} : \sqrt{x^2+4^2} \Leftrightarrow x = 8$$

$$* V_{ABCMNP} = V_{B.MNCA} + V_{P.MNCA}$$

$$= \frac{3}{4}V_{B.AB'C} + \frac{3}{4}V_{P.AB'C} = \frac{3}{4}V_{B.AB'C} + \frac{3}{8}V_{D.AB'C}$$

$$= \frac{9}{8}V_{B'.ABC} = \frac{9}{8}.\frac{1}{3}.\frac{(4.4.\sin 60^0)}{2}.8 = 12\sqrt{3}.$$

**Chọn A.**