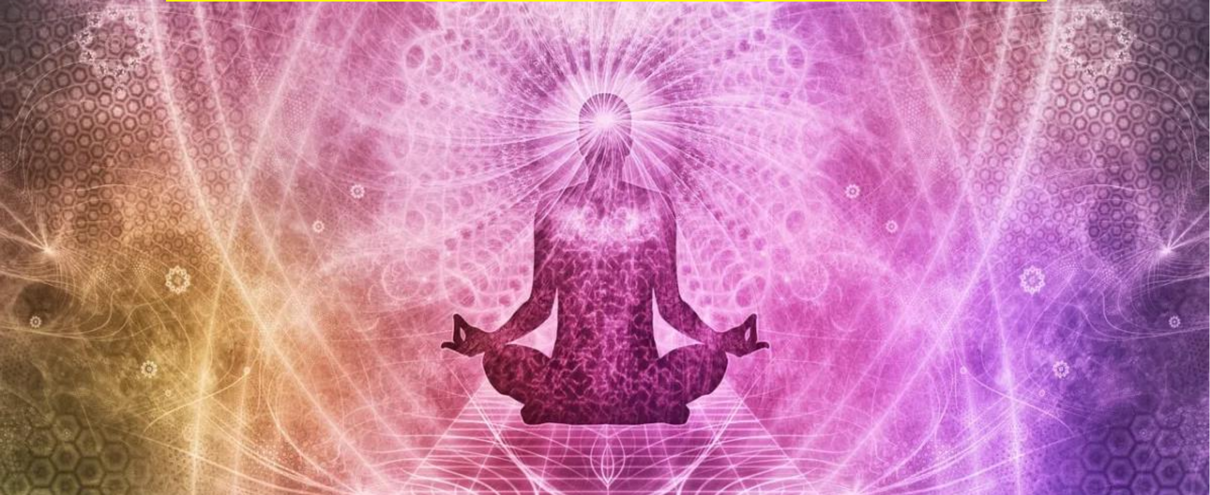
Chuyên đề Bồi dưỡng HSG Tỉnh lớp 12
CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC



MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN

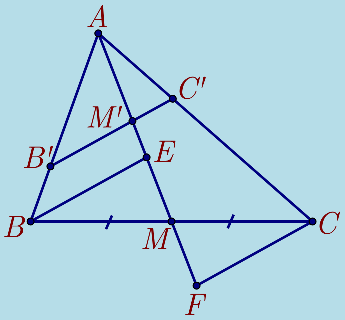
BTCB 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. B', C' bất kỳ thuộc cạnh AB, AC. M' là giao điểm của $B'C'$ và AM. Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{AB'} + \dfrac{AC}{AC'} = 2.\dfrac{AM}{AM'}$.

Chứng minh: Kẻ BE, CF song song với $B'C'$ (E, F thuộc AM). Ta có

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = \frac{AE}{AM'} + \frac{AF}{AM'} = \frac{AE + AF}{AM'}$$

$$= \frac{(AM - ME) + (AM + MF)}{AM'}$$

$$= \frac{2AM}{AM'}$$



BTCB 2. Cho tam giác ABC có $M \in [BC]$ sao cho $BM = 2MC$. B', C' bất kỳ thuộc cạnh AB, AC. $M' = B'C' \cap AM$. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AB'} + 2.\frac{AC}{AC'} = 3.\frac{AM}{AM'}$.

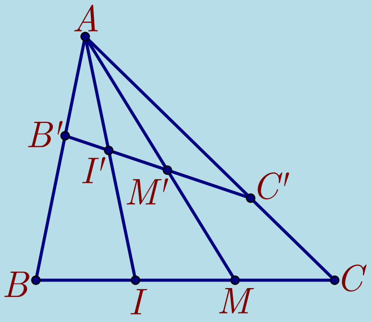
Chứng minh: Gọi I là trung điểm BM. I' là giao điểm của $B'C'$ và AI. Áp dụng BTCB1 ta có

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AM}{AM'} = 2.\frac{AI}{AI'} \quad (1)$$

$$\frac{AI}{AI'} + \frac{AC}{AC'} = 2.\frac{AM}{AM'}$$

$$\Rightarrow 2.\frac{AI}{AI'} + 2.\frac{AC}{AC'} = 4.\frac{AM}{AM'} \quad (2)$$

Cộng (1), (2) vế theo vế suy ra điều cần chứng minh.



BTCB 3. Hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm ΔABC. (α) bất kỳ cắt SA, SB, SC, SG tại A', B', C', G'. Chứng minh rằng $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3\frac{SG}{SG'}$.

Chứng minh: Gọi M là trung điểm BC, M' là giao điểm của $B'C'$ và $SM \Rightarrow G' = A'M' \cap SG$.

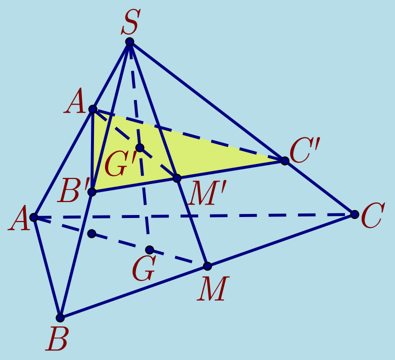
Theo BTCB2 và BTCB1 ta có

$$\frac{SA}{SA'} + 2.\frac{SM}{SM'} = 3.\frac{SG}{SG'} \quad (1)$$

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 2.\frac{SM}{SM'} \quad (2)$$

Cộng (1), (2) vế theo vế suy ra

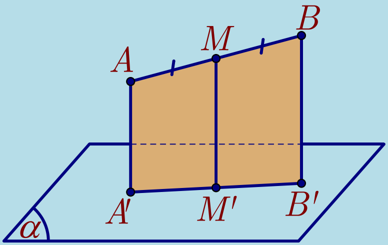
$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3\frac{SG}{SG'}.$$



BTCB 4. Cho (α) và đoạn thẳng AB nằm cùng phía đối với (α). Gọi M là trung điểm AB. Chứng minh rằng $d\big(A,(\alpha)\big)+d\big(B,(\alpha)\big)=2d\big(M,(\alpha)\big)$.

Chứng minh: Gọi A', M', B' lần lượt là hình chiếu của A, M, B lên $(\alpha) \Rightarrow A', M', B'$ thẳng hàng

$$\Rightarrow d\big(A,(\alpha)\big)+d\big(B,(\alpha)\big)=AA'+BB'$$
$$=2MM'$$
$$=2d\big(M,(\alpha)\big).$$



BTCB 5. Cho (α) và tam giác ABC nằm cùng phía đối với (α). Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh rằng $d\big(A,(\alpha)\big) + d\big(B,(\alpha)\big) + d\big(C,(\alpha)\big) = 3d\big(G,(\alpha)\big)$.

Chứng minh: Gọi A', B', C', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, G lên $(\alpha) \Rightarrow G'$ là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Theo quy tắc 2 trọng tâm ta có

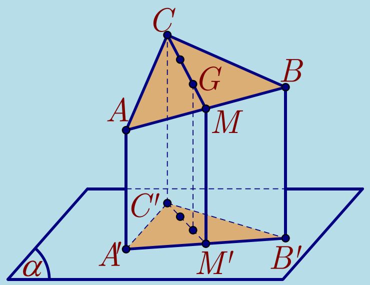
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Vì các véctơ này cùng hướng nên

$$AA' + BB' + CC' = 3GG'.$$

Suy ra

$$d\big(A,(\alpha)\big) + d\big(B,(\alpha)\big) + d\big(C,(\alpha)\big) = 3d\big(G,(\alpha)\big).$$



BTCB 6. Cho hình chóp $S.ABC$. Điểm $I \in (ABC)$ thỏa mãn $\overrightarrow{SI} = a\overrightarrow{SA} + b\overrightarrow{SB} + c\overrightarrow{SC}$. Chứng minh rằng $a + b + c = 1$.

Chứng minh: Ta có

$$\overrightarrow{SI} = a\overrightarrow{SA} + b\overrightarrow{SB} + c\overrightarrow{SC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SI} = a\left(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA}\right) + b\left(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB}\right) + c\left(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c - 1)\overrightarrow{IS} = a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}.$$

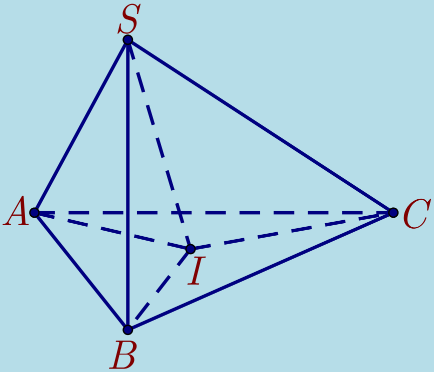
Vì $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}$ đồng phẳng nên tồn tại $(m; n)$ t/m

$$\overrightarrow{IA} = m\overrightarrow{IB} + n\overrightarrow{IC}$$

$$\Rightarrow (a + b + c - 1)\overrightarrow{IS} = (am + b)\overrightarrow{IB} + (an + c)\overrightarrow{IC}.$$

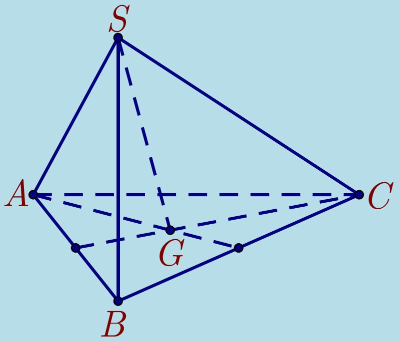
Nếu $a + b + c \neq 1$ thì S, I, B, C đồng phẳng.

Suy ra $a + b + c = 1$.



BTCB 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) đi qua G và cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng
$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3.$$

Giải: Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên
$$\overrightarrow{SG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{SA}{SA'}.\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}.\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}.\overrightarrow{SC'}\right)$$
$$=\frac{SA}{3SA'}.\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{3SB'}.\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{3SC'}.\overrightarrow{SC'}.$$
Vì G, A', B', C' đồng phẳng nên
$$\frac{SA}{3SA'}+\frac{SB}{3SB'}+\frac{SC}{3SC'}=1.$$
Từ đó suy ra điều cần chứng minh.



BTCB 8. Cho hình chóp $S.ABC$. I thuộc (ABC) thõa mãn $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ $(a+b+c\neq 0)$. Mặt phẳng (α) đi qua I và cắt các tia SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Chứng minh rằng

$$a.\frac{SA}{SA'}+b.\frac{SB}{SB'}+c.\frac{SC}{SC'}=a+b+c.$$

Giải: Ta có $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

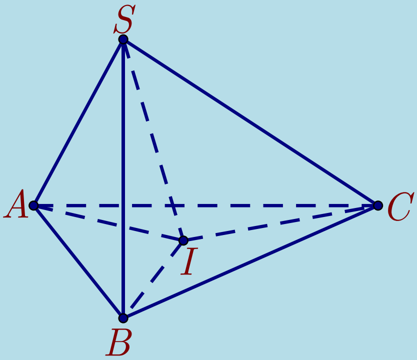
$$\Leftrightarrow a\left(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SI}\right)+b\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SI}\right)+c\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SI}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SI}=\frac{a\overrightarrow{SA}+b\overrightarrow{SB}+c\overrightarrow{SC}}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SI}=\frac{\frac{aSA}{SA'}.\overrightarrow{SA'}+\frac{bSB}{SB'}.\overrightarrow{SB'}+\frac{cSC}{SC'}.\overrightarrow{SC'}}{a+b+c}.$$

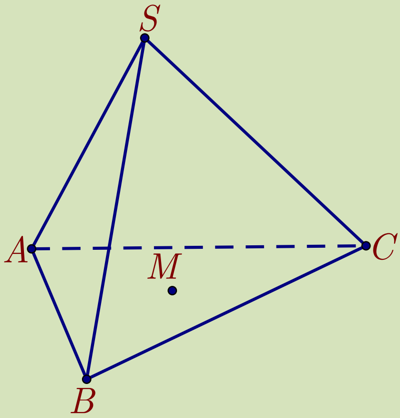
Vì I,A',B',C' đồng phẳng nên

$$\frac{\frac{aSA}{SA'}+\frac{bSB}{SB'}+\frac{cSC}{SC'}}{a+b+c}=1.$$ Suy ra điều cần c/m.



BTCB 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có điểm M nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M lần lượt song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng

$$\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=1.$$

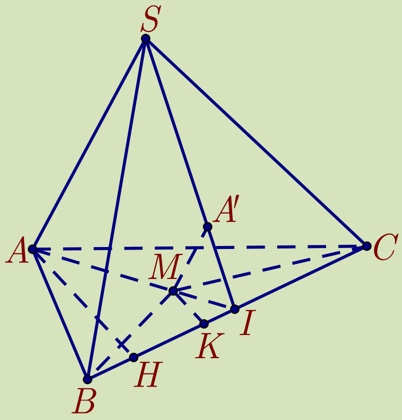


Giải BTCB 9. Gọi $I = AM \cap BC$. Trong (SAI), kẻ $MA' / /SA\ (A' \in SI)$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của M, A lên BC. Ta có

$$\frac{MA'}{SA} = \frac{IM}{IA} = \frac{MK}{AH} = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}.$$

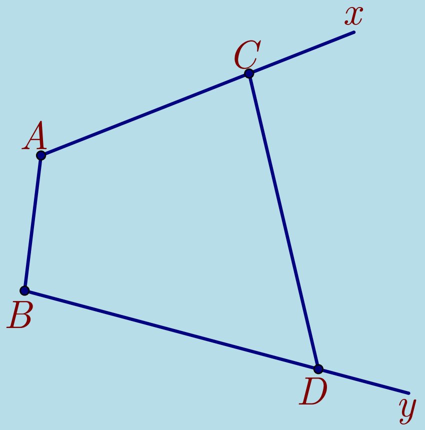
Tương tự ta có $\dfrac{MB'}{SB} = \dfrac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}$ và $\dfrac{MC'}{SC} = \dfrac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC} = 1$.



MỘT SỐ BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau. Hai điểm C, D di động trên Ax, By sao cho $\frac{1}{AC}+\frac{2}{BD}=\frac{3}{AB}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa CD và song song với AB, (β) là mặt phẳng chứa Ax và song song với By. Chứng minh rằng (α) luôn đi qua một điểm cố định thuộc (β).



Giải Câu 1. Dựng $Ay' // By$. Trên Ay' lấy điểm D' sao cho $AD' = BD$. Khi đó $(\alpha) \equiv (CDD)$, $(\beta) \equiv (ACD')$. Ta có

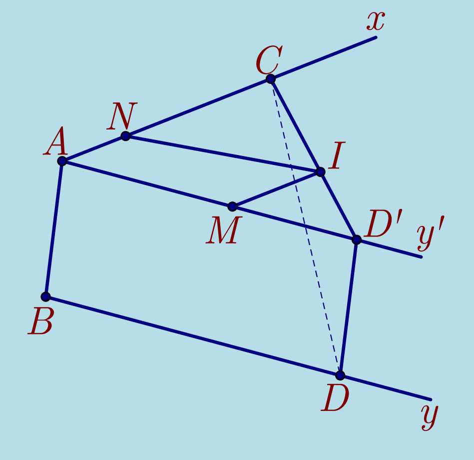
$$\frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} = \frac{3}{AB} \Leftrightarrow \frac{AB}{3AC} + \frac{2AB}{3AD'} = 1 \quad (1)$$

Lấy điểm $I \in CD'$ sao cho $\dfrac{D'I}{D'C} = \dfrac{AB}{3AC}$.

Kẻ $IM // CA$ $(M \in Ay')$, kẻ $IN // D'A$ $(N \in Ax)$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{D'I}{D'C} = \frac{AB}{3AC} \Rightarrow AN = \frac{AB}{3} \quad (*)$$

Ta có $\dfrac{AM}{AD'} = \dfrac{CI}{CD'} = 1 - \dfrac{D'I}{D'C} = 1 - \dfrac{AB}{3AC} = \dfrac{2AB}{3AD'}$ (do (1))



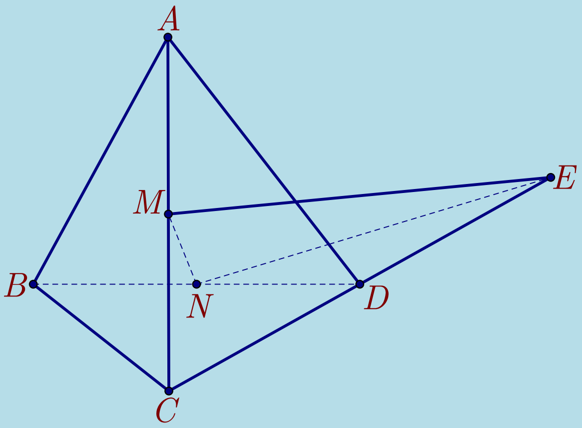
$$\Rightarrow AM = \frac{2}{3}AB \quad (**).$$

Từ (*) và (**) suy ra I cố định. Vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Gọi E là điểm đối xứng với C qua D. Mặt phẳng (EMN) cắt BC, AD lần lượt tại P và Q.

$a)$ Chứng minh rằng AB, MP, NQ đồng quy.

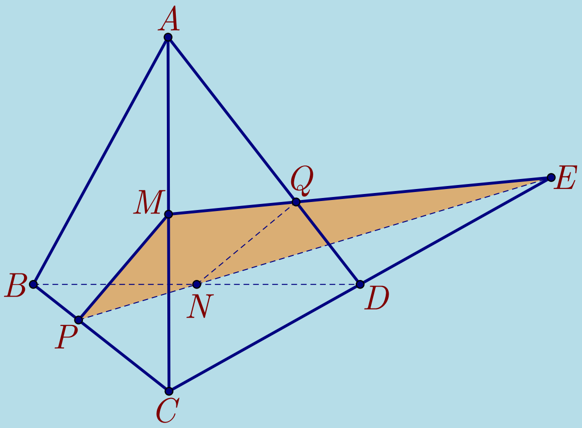
$b)$ Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm của PQ.



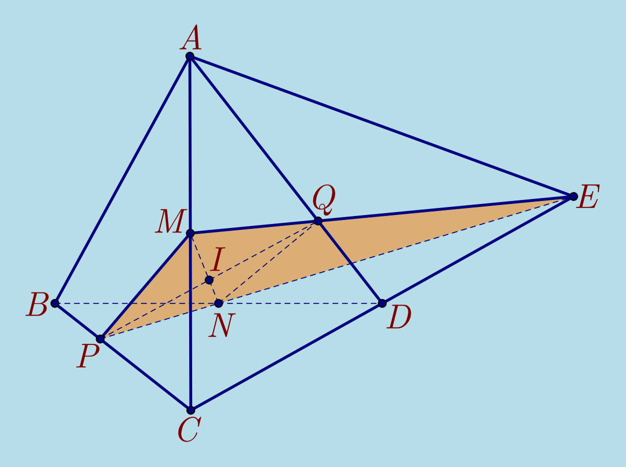
Giải Câu 2. $a)$ Ta có

$P = EN \cap BC,\ Q = EM \cap AD.$

Ba mp (ABC), (ABD), $(MPNQ)$ cắt nhau theo 3 giao tuyến phân biệt AB, MP, NQ nên chúng sẽ đồng quy hoặc đôi một song song. Dễ thấy P không phải là trung điểm BC nên MP không song song với AB. Suy ra AB, MP, NQ đồng quy.



Giải Câu 2. $b)$ Ta có Q là trọng tâm của tam giác ACE nên $\dfrac{ME}{MQ}=3.$ Áp dụng Đ/l Menelaus cho ΔNDE với cát tuyến BPC có



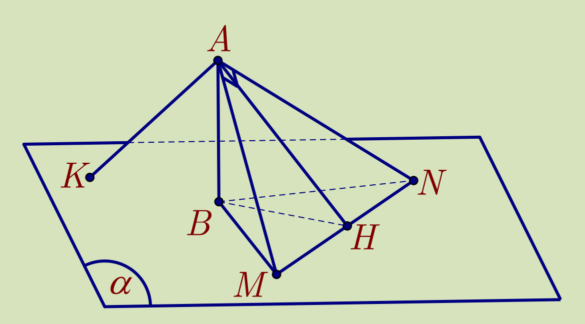
$$\frac{BD}{BN}.\frac{PN}{PE}.\frac{CE}{CD}=1\Rightarrow 2.\frac{PN}{PE}.2=1$$

$$\Rightarrow \frac{PN}{PE}=\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{NP}{NE}=\frac{1}{3}.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác PQE với cát tuyến MIN ta có

$$\frac{ME}{MQ}.\frac{IQ}{IP}.\frac{NP}{NE}=1\Rightarrow 3.\frac{IQ}{IP}.\frac{1}{3}=1\Rightarrow IP=IQ.$$

Câu 3. Cho đoạn thẳng AB vuông góc với mặt phẳng (P) tại B. Trong (P) lấy điểm H thỏa mãn $BH = BA$. Vẽ đường thẳng d nằm trong (P) và đi qua H, d vuông góc với BH. Hai điểm M, N di động trên d thỏa mãn $\widehat{MAN} = 90^0$. Đường thẳng qua A và vuông góc với (AMN) cắt (P) tại K.



a) Chứng minh rằng B là trực tâm của tam giác KMN.

b) Gọi α, β lần lượt là góc tạo với BM và (AKN), BN và (AKM). Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{1}{2}$.

Giải Câu 3. a) Ta có $AK\perp(AMN)$ nên $AK\perp MN$. Ta có $AB\perp(P)$ nên $AB\perp MN\Rightarrow MN\perp(ABK)\Rightarrow MN\perp BK$.

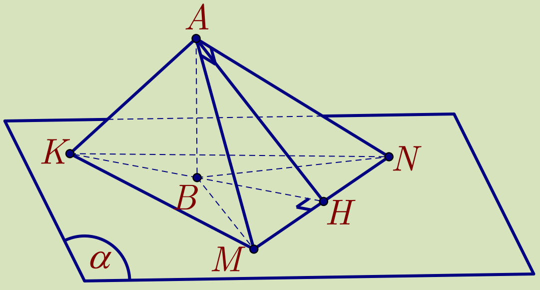
Mà $MN\perp BH$ nên K,B,H thẳng hàng.

Ta có $MA\perp AN$ (gt), $MA\perp AK$ (vì $AK\perp(AMN)$). Suy ra $MA\perp(AKN)$

$\Rightarrow KN\perp MA$. Mà $KN\perp AB$

$\Rightarrow KN\perp(ABM)\Rightarrow KN\perp BM$.

Vậy B là trực tâm tam giác KMN.



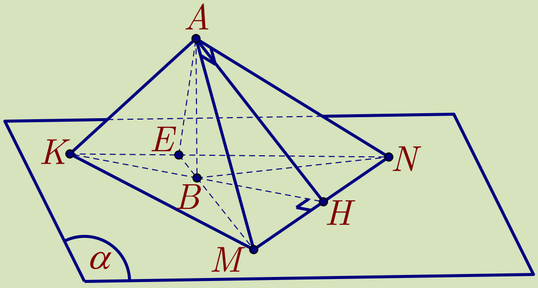
Giải Câu 3. b) Gọi $E = MB \cap KN$. Vì $MA \perp (AKN)$ nên $\left(\widehat{MB,(AKN)}\right) = \widehat{MEA} = \widehat{MAB}$ (cùng phụ với $\widehat{AME}$). Tương tự $\left(\widehat{NB,(AKM)}\right) = \widehat{NAB}$. Suy ra

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\widehat{MAB} + \cos^2\widehat{NAB}$$

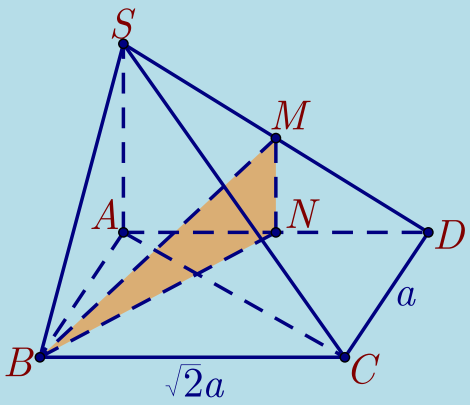
$$= \left(\frac{AB}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AN}\right)^2$$

$$= AB^2\left(\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}\right) = \frac{AB^2}{AH^2} = \frac{1}{2}$$

(vì ΔABH vuông cân tại B).



Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = \sqrt{2}a$. Cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SD và AD. Chứng minh rằng AC vuông góc với (BMN).



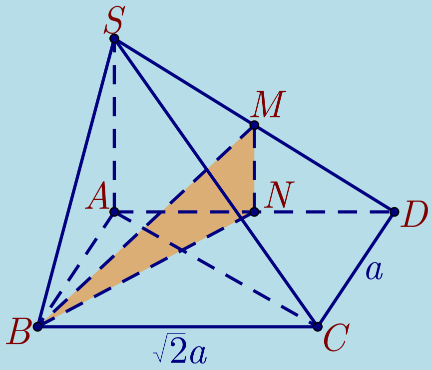
Giải Câu 4. Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$, mà $MN\,//\,SA$ nên $MN \perp AC$ (1).

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AC} &= \ \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} \ \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}}_{0} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AD} - AB^2 - \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{0} \\ &= \frac{\sqrt{2}a}{2}.\sqrt{2}a - a^2 = 0\end{aligned}$$

Suy ra $BN \perp AC$ (2).

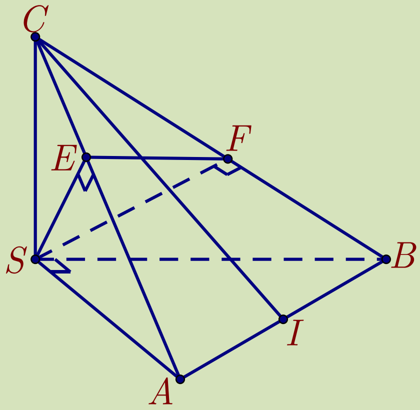
Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (BMN)$.



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm AB. Biết rằng $AC = 2SB$, $BC = 2SA$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của S lên CA, CB.

$a)$ Chứng minh rằng $SC \perp EF$.

$b)$ Chứng minh rằng $\dfrac{\tan^4 SCI}{\tan^4 SCA} + \dfrac{EF}{AB} = 1$.



Giải Câu 5. $a)$ Chứng minh rằng $SC \perp EF$.

Ta có

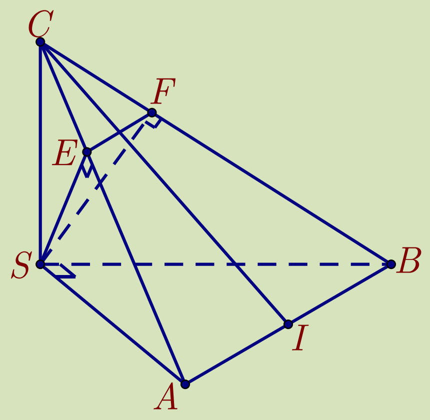
$$SC^2 = BC^2 - SB^2 = 4SA^2 - SB^2$$
$$SC^2 = AC^2 - SA^2 = 4SB^2 - SA^2$$

Suy ra $SA = SB$. Do đó $CA = CB$.

Dẫn đến $SE = SF \Rightarrow EF \,//\, AB$.

Vì $\begin{cases} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{cases} \Rightarrow SC \perp (SAB)$

$$\Rightarrow SC \perp AB \Rightarrow SC \perp EF.$$



Giải Câu 5. $b)$ Chứng minh $\dfrac{\tan^4 SCI}{\tan^4 SCA}+\dfrac{EF}{AB}=1.$

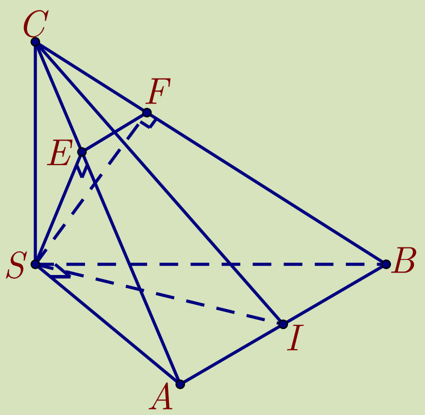
Đặt $SA=SB=a$

$\Rightarrow CA=CB=2a\Rightarrow SC=\sqrt{3}a.$

Khi đó

$$\tan SCI=\frac{SI}{SC}=\frac{\sqrt{2}a}{2.\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

và $\tan SCA=\dfrac{SA}{SC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

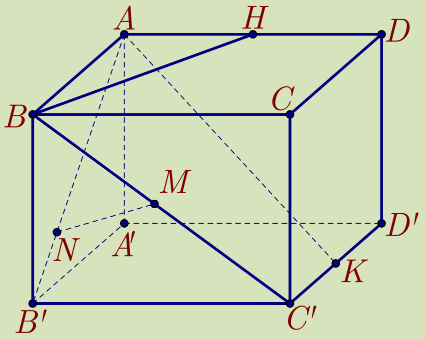


Ta có $\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{CE}{CA}=\dfrac{CE.CA}{CA^2}=\dfrac{CS^2}{CA^2}=\dfrac{3}{4}$. Do đó $\dfrac{\tan^4 SCI}{\tan^4 SCA}+\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1.$

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm H, K lần lượt là trung điểm $AD, C'D'$. Điểm M thuộc đoạn BC', N thuộc đoạn AB' $(BM \leq AN)$. Biết rằng MN tạo với $(ABCD)$ một góc 45^0.

$a)$ Chứng minh rằng $AK \perp BH$.

$b)$ Chứng minh rằng $MN \geq 2-\sqrt{2}\ a$.



Giải Câu 6. $a)$ Chứng minh rằng $AK \perp BH$.

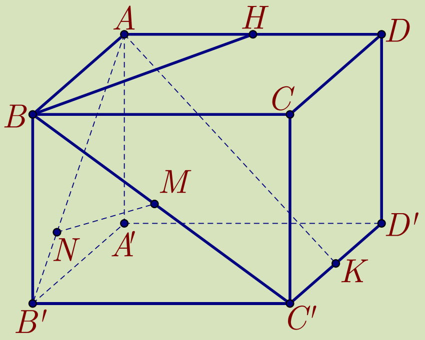
Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{z}$. Ta có

$$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'K} \;.\; \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}$$

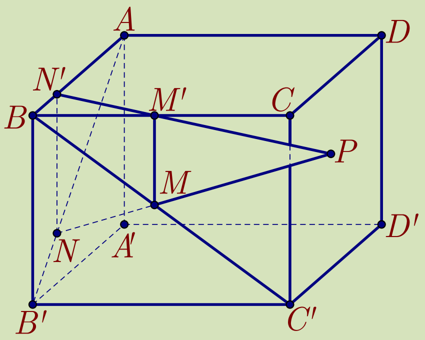
$$= \left(\vec{y} + \vec{z} + \frac{1}{2}\vec{x}\right).\left(\frac{\vec{y}}{2} - \vec{x}\right)$$

$$= \frac{\left|\vec{y}\right|^2}{2} - \frac{\left|\vec{x}\right|^2}{2} = 0.$$

Suy ra $AK \perp BH$.



Giải Câu 6. $b)$ Gọi M', N' là hình chiếu của M, N lên $(ABCD)$. Gọi $P = MN \cap M'N'$.



Khi đó $45^0 = (MN, (ABCD)) = MPM'$.

Ta có $MM' = BM'$, $NN' = AN' = a - BN'$, $MN = PN - PM$. Do đó

$$\sqrt{BM'^2 + BN'^2} = M'N' = PN' - PM'$$

$$= PN\cos 45^0 - PM\cos 45^0 = MN.\cos 45^0 \ (1).$$

Ta có $MN\sin 45^0 = PN\sin 45^0 - PM\sin 45^0 = NN' - MM' = a - BN' - BM'$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $\sqrt{2}\cos 45^0 + \sin 45^0 \ MN = \sqrt{2(BM'^2 + BN'^2)} + a - (BM' + BN')$

$$\geq (BM' + BN') + a - (BM' + BN') = a.$$

Suy ra $MN \geq \left(2 - \sqrt{2}\right)a$.