

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
- b) Tìm tọa độ các giao điểm của (C) với đường thẳng $\Delta : y = 2x + 7$.

Câu 2 (1 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{16}{x} - 2$ trên $[1; 8]$.

Câu 3 (2 điểm). Giải các phương trình sau

- a) $4^{x+\frac{1}{x}} = \frac{1}{32}$;
- b) $8x^2 - 24x + 16 + \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{3x-5}} = 0$.

Câu 4 (1 điểm). Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + 3xy \leq 4y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y}.$$

Câu 5 (2 điểm). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết rằng $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AB' = a\sqrt{5}$.

- a) Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AA'B'C'$ theo a .

Câu 6 (2 điểm). Cho hình nón đỉnh S , đường tròn đáy (O). Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng qua trục ta được $\triangle SAB$ vuông cân có cạnh huyền bằng $2a$.

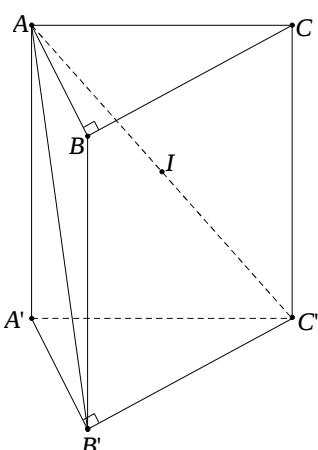
- a) Tính theo a diện tích xung quanh của hình nón đã cho.
- b) Điểm C thuộc đường tròn đáy sao cho (SAC) tạo với mặt phẳng chứa mặt đáy của hình nón một góc 60° . Tính theo a khoảng cách từ O đến (SAC) .

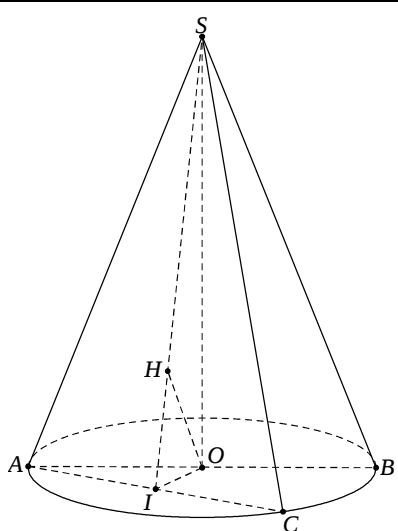
----- **HẾT** -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!
Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Câu	Đáp án	Điểm								
Câu 1 (2đ)	Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho. b) Tìm tọa độ các giao điểm của (C) với đường thẳng $\Delta : y = 2x + 7$.									
	a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị. Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$. Suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị. Ta có $y' = \frac{1}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \neq -1.$ Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$	0,5								
	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr></table> y 2 $+\infty$ $-\infty$ 2	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	y'	+		+	0,5
x	$-\infty$	-1	$+\infty$							
y'	+		+							
	Đồ thị giao với trục Ox tại điểm $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$; giao với trục Oy tại điểm $(0; 1)$. Đồ thị nhận giao điểm hai đường tiệm cận $I(-1; 2)$ làm tâm đối xứng. Đồ thị có dạng như hình vẽ.									

	b) Phương trình hoành độ giao điểm	
	$\frac{2x+1}{x+1} = 2x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = 2x^2+9x+7 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+7x+6=0 \\ x \neq -1 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow x = -2, x = -\frac{3}{2}.$	0,5
	Vậy tọa độ các giao điểm cần tìm là: $(-2; 3)$ và $\left(-\frac{3}{2}; 4\right)$	
Câu 2	Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{16}{x} - 2$ trên $[1; 8]$.	
(1đ)	Ta có $y' = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (vì } x \in [1; 8]).$	0,5
	Ta có $y(1) = 15, y(4) = 6, y(8) = 8$. Suy ra GTNN, GTLN của hàm số đã cho tương ứng là 6 và 15.	0,5
Câu 3	Giải các phương trình sau	
(2đ)	a) $4^{x+\frac{1}{x}} = \frac{1}{32};$ b) $8x^2 - 24x + 16 + \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{3x-5}} = 0.$	
	a) Điều kiện: $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $2^{\frac{2x+2}{x}} = 2^{-5} \Leftrightarrow 2x + \frac{2}{x} = -5$	0,5
	$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$	0,5
	Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -2, x = -\frac{1}{2}.$	
	b) Điều kiện $x > \frac{5}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với $(3x-4)^2 - \frac{1}{\sqrt{(3x-4)-1}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (1)$	0,5
	Xét hàm số $f(t) = t^2 - \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ trên $(1; +\infty)$. Phương trình (1) có dạng $f(3x-4) = f(x) \quad (2)$	
	Ta có $f'(t) = 2t + \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}} > 0, \forall t > 1$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Do đó $(2) \Leftrightarrow 3x-4 = x \Leftrightarrow x = 2.$	0,5
	Đổi chiếu với điều kiện ta được nghiệm cần tìm là $x = 2$.	

Câu 4 (1đ)	Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + 3xy \leq 4y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y}.$	
	Vì $x > 0, y > 0$ và $x^2 + 3xy \leq 4y^2$ nên $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) - 4 \leq 0 \Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leq 1.$ Đặt $t = \frac{x}{y}$, suy ra $0 < t \leq 1$. Khi đó $P = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 2}} - \frac{2t+3}{t+2}, 0 < t \leq 1$	0,5
	Xét hàm $f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 2}} - \frac{2t+3}{t+2}$, với $0 < t \leq 1$. Ta có $f'(t) = \frac{5-3t}{2\sqrt{(t^2 - t + 2)^3}} - \frac{1}{(t+2)^2}$ Với $0 < t \leq 1$ ta có $t^2 - t + 2 = t(t-1) + 2 \leq 2$, $5-3t \geq 2$ và $t+2 > 2$. Do đó $\frac{5-3t}{2\sqrt{(t^2 - t + 2)^3}} > \frac{5-3t}{4\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ và $-\frac{1}{(t+2)^2} > -\frac{1}{4}$. Suy ra $f'(t) > \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} > 0$ với $\forall t \in (0;1]$ Vì vậy $P = f(t) \leq f(1) = \sqrt{2} - \frac{5}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{2} - \frac{5}{3}$.	0,5
Câu 5 (2đ)	Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết rằng $AB = a, AC = a\sqrt{3}, AB' = a\sqrt{5}$. a) Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AA'B'C'$ theo a .	
	a) Áp dụng định lý Pitago cho hai tam giác $\triangle ABC, \triangle ABB'$ ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$ $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$	0,5
	Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{ABC}$ $= 2a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}a^3.$	0,5

	b) Ta có $\widehat{AA'C'} = 90^0$ (1). Vì $C'B' \perp A'B'$, $C'B' \perp BB' \Rightarrow C'B' \perp (BCC'B')$ $\Rightarrow C'B' \perp AB' \Rightarrow \widehat{AB'C'} = 90^0$ (2). Từ (1) và (2) suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AA'B'C'$ là trung điểm I của AC'. Bán kính của mặt cầu này bằng $R = IA = \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$	0,5
	<i>Chú ý.</i> HS cũng có thể làm theo một trong 2 cách dưới đây: <i>Cách 1.</i> Dựng trục đường tròn đáy $A'B'C'$ và cho cắt trung trực của AA'. <i>Cách 2.</i> Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AA'B'C'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khi đó tâm mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy của lăng trụ đó.	
Câu 6 (2đ)	Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy (O). Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng qua trục ta được ΔSAB vuông cân có cạnh huyền bằng $2a$. a) Tính theo a diện tích xung quanh của hình nón đã cho. b) Điểm C thuộc đường tròn đáy sao cho (SAC) tạo với mặt phẳng chứa mặt đáy của hình nón một góc 60^0. Tính theo a khoảng cách từ O đến (SAC).	
	a) Bán kính đáy của hình nón là $R = OA = \frac{1}{2} AB = a.$ Đường sinh của hình nón là $l = SA = AB \sin 45^0 = a\sqrt{2}.$ Suy ra diện tích xung quanh của hình nón bằng $S_{xq} = \pi Rl = \pi\sqrt{2}a^2.$	0,5
	b) Kẻ $OI \perp AC$ tại I. Khi đó I là trung điểm AC. Kẻ $OH \perp SI$ tại H. Ta có $AC \perp OI, AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SOI)$ $\Rightarrow AC \perp OH \Rightarrow OH \perp (SAC).$ Suy ra $d(O, (SAC)) = OH$.	0,5
	Ta có $\widehat{SIO} = 60^0 \Rightarrow OI = SO \cdot \cot 60^0 = \frac{a}{\sqrt{3}}.$ Trong tam giác vuông HIO ta có $OH = OI \cdot \sin 60^0 = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}.$ Suy ra $d(O, (SAC)) = \frac{a}{2}.$	0,5